

1909.

LIBRARY
MICHIGAN STATE NORMAL
COLLEGE

No 4.

ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 28. HEFT 4.

DER GANZEN REIHE 383. BANDES 4. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG, 1909.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagabbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.

(Ausgegeben am 16. März 1909.)

In h a l t.

	Seite
1. A. Sommerfeld. Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie	665
2. Walter Ritz. Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern	737
3. Günther Schulze. Über die Maximalspannung der elektrolytischen Ventilzellen	787
4. Eugen Bassler. Polarisation der X-Strahlen, nachgewiesen mittels Sekundärstrahlung	808
5. A. Einstein. Bemerkung zu der Arbeit von D. Mirimanoff „Über die Grundgleichungen . . .“	885

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleieherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuziehen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



u
V
E
K
h
g
p
n
s
e
(x
g
A
p
e
w
"M
u
E
d
w
b
a
e

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 28.

1. *Über die Ausbreitung
der Wellen in der drahtlosen Telegraphie;
von A. Sommerfeld.*

§ 1. Einleitung und Ergebnisse.

Während sich die weitaus größte Mehrzahl der praktischen und theoretischen Arbeiten über drahtlose Telegraphie mit den Verhältnissen beim Sender und Empfänger beschäftigt, hat die Frage nach der Ausbreitung der Wellen zwischen Sender und Empfänger, insbesondere nach der Rolle, welche die Erde hierbei spielt, verhältnismäßig wenig Beachtung gefunden. Mit gutem Grunde: jene Verhältnisse sind es allein, die der Experimentator kontrollieren kann. Dagegen muß er den Mechanismus der Ausbreitung als etwas Gegebenes hinnehmen.

Ein mehr formaler Grund mag hinzukommen: Während sich die Theorie des Senders und Empfängers verhältnismäßig einfach gestaltet und mit praktisch genügender Annäherung (man denke an die gekoppelten Systeme) durch totale Differentialgleichungen beherrscht wird, führt uns die Frage nach der Ausbreitung der Wellen unausbleiblich in das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen und stellt uns vor nicht ganz einfache Randwertaufgaben.

Zwei Auffassungen stehen sich hier gegenüber, die — wenigstens in allgemeinen Umrissen — durch den Gegensatz „Raumwellen“ und „Oberflächenwellen“ gekennzeichnet werden. Mit Raumwellen haben wir es in der Akustik und bei der überwiegenden Mehrzahl der optischen Erscheinungen zu tun. Ebenfalls zu den Raumwellen gehören die Hertzschen Wellen der Elektrodynamik. Das klassische Beispiel von Oberflächenwellen sind diejenigen der Hydrodynamik. In der Optik treten bei der Totalreflexion im optisch dünneren Medium Oberflächenwellen auf, die namentlich von Voigt theoretisch und experimentell untersucht worden sind. Ferner sind die elektro-

dynamischen Drahtwellen typische Oberflächenwellen. Endlich sei auf die Elastizitätstheorie hingewiesen, wo sich in den neueren seismischen Beobachtungen die Wellen vom Raum- und Oberflächentyp deutlich voneinander sondern lassen.

Welchem Typus sind nun die Wellen der drahtlosen Telegraphie zuzuzählen? Sind sie den Hertzschen Wellen in Luft zu vergleichen oder den elektrodynamischen Drahtwellen?

Die erste Ansicht dürfte die vorherrschende sein. Sie stützt sich in quantitativer Hinsicht auf eine Untersuchung von M. Abraham¹⁾, dem es gelang, aus einer schon von Hertz angegebenen einfachsten Potentialfunktion Π Gesetze für die Ausbreitung der elektrischen und magnetischen Kraft und ihrer Abhängigkeit von Entfernung und Azimut zu entwickeln und damit zu einer ersten Klärung unseres Gebietes wesentlich beizutragen.

Bei Hertz handelte es sich bekanntlich um die Aufgabe, das Feld eines Erregers Hertz'scher Schwingungen zu beschreiben. Denkt man die beiden Teile des Erregers, zwischen denen der Funke überspringt, als punktförmig, so ergibt sich das Feld eines „Dipols“. Setzt man nun mit Hertz:

$$\Pi = \frac{e^{ikR}}{R},$$

wo R den Abstand vom Dipol, k eine Materialkonstante des umgebenden Mediums (s. u.) bedeutet (im reinen Äther ist $k/2\pi$ die reziproke Wellenlänge der Hertz'schen Schwingung), so läßt sich aus diesem Π das elektromagnetische Feld durch einen einfachen Differentiationsprozeß ableiten. In Gedanken ist bei Π der Zeitfaktor e^{-int} (n = Frequenz der Schwingung) und der Übergang zum reellen Teil zu ergänzen. Insbesondere wird das elektrische Feld in der Nähe des Dipols gegeben durch den Gradienten von $\partial\Pi/\partial z$, wenn z die Achse des Erregers ist, was eben der Differenzwirkung einer positiven und negativen oszillierenden Ladung, d. h. einem Dipol entspricht.

Die Diagramme, die Hertz im Anschluß an jene Lösung entwirft, zeigen nun, daß die elektrischen Kraftlinien zur

1) M. Abraham, Physikal. Zeitschr. 2. p. 329. 1901; Theorie der Elektrizität 2. § 34 und Enz. d. math. Wiss. V. Art. 18.

Äquatorebene ($z = 0$) des Dipols senkrecht stehen. Hierauf gründet sich die Abrahamsche Anwendung der Hertzschen Lösung in der drahtlosen Telegraphie unter der Annahme einer *vollkommen leitenden Erde*, auf der ja die elektrischen Kraftlinien ebenfalls senkrecht endigen müßten. Die Erdoberfläche tritt also an die Stelle der Äquatorebene des Dipols. Die Erde würde unter dieser Annahme keine andere Rolle spielen, als daß sie den vom Sender ausgehenden Raumwellen den Eintritt verwehrt.

Übrigens tritt die Hertzsche Lösung in der Optik schon viel früher auf zur Charakterisierung einer einfachsten optischen Punktquelle, von der sich kugelförmige Raumwellen ausbreiten. Wir werden daher wegen späterer Verallgemeinerungen und im Anschluß an seinen analytischen Ausdruck II auch als *Funktion des leuchtenden Punktes* bezeichnen.

Die umgekehrte Ansicht, daß es sich bei der drahtlosen Telegraphie um ein Analogon zu den Drahtwellen handle und daß die Erde die Wellenfortpflanzung wesentlich mitbestimmt, ist verschiedentlich¹⁾ geäußert worden. Eine quantitative Unterlage erhielt sie durch die Dissertation von Uller²⁾ und durch neuere Arbeiten von Zenneck.³⁾ Uller untersucht eine bestimmte Art ebener — in der Bezeichnung von Voigt „inhomogener ebener“ — Wellen, welche auf die Grenze der beiden Medien Erde und Luft mehr oder minder konzentriert sind. Zenneck zieht unter Voraussetzung dieser Wellenform eine Reihe bemerkenswerter Schlüsse über das Verhalten der elektrischen Wellen bei verschiedener Bodenbeschaffenheit und über die Wirkung der Empfänger und Sender für gerichtete Telegraphie.

Als Oberflächenwellen werden diese Wellen namentlich durch den Wert von Fortpflanzung und Dämpfung gekennzeichnet. Sind ϵ , μ , σ Dielektrizitätskonstante, Permeabilität

1) A. Blondel, C. R. du Congrès de Nantes 1898; E. Lecher, Physik. Zeitschr. 3. p. 273. 1901.

2) K. Uller, Beiträge zur Theorie der elektromagnetischen Strahlung, Rostock 1903. E. Cohn hatte in seinem Lehrbuche denselben Wellentyp bereits früher mit Rücksicht auf die Theorie der Drahtwellen behandelt.

3) J. Zenneck, Ann. d. Phys. 23. p. 846. 1907; sowie Physik. Zeitschr. 9. p. 50 und 553. 1908.

und Leitfähigkeit des ersten oder zweiten Mediums (Luft oder Erde), so kommt es wesentlich auf die Größe

$$k^2 = \frac{\epsilon \mu n^2 + i \mu \sigma n}{c^2}$$

an, die wir für Luft und Erde als k_1^2 und k_2^2 unterscheiden. Aus beiden Größen baut sich (wenn die Permeabilität von Luft und Erde gleich 1 gesetzt wird, ein Fall, auf den wir uns in dieser Übersicht durchweg beschränken dürfen) diejenige komplexe Größe

$$s = \sqrt{\frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}}$$

auf, welche Fortpflanzung und Dämpfung durch ihren reellen und imaginären Teil bestimmt. Dabei ist die Bezeichnung als Oberflächenwelle nicht so aufzufassen, daß wie bei den Wasserwellen oder den seismischen Störungen der Sitz der Wellen wesentlich das zweite Medium sei. Im Gegenteil findet sich der Hauptteil der Energie im ersten Medium, Luft, ebenso wie bei den Drahtwellen. Die Amplitude nimmt von der Erdoberfläche nach oben hin langsam, nach unten hin schnell ab (Skineffekt).

Dieser interessante Wellentyp war aber bisher durchaus hypothetisch. Daß er sich wirklich aus den vom Sender ausgehenden Wellen in größerer Entfernung vorzugsweise herausbildet, dafür fehlte sozusagen der Existenzbeweis.

Es ist eine Hauptaufgabe der vorliegenden Untersuchung diesen Beweis zu liefern und die Frage: Raumwellen oder Oberflächenwellen? zu entscheiden.

Von vornherein ist zu betonen, daß die Antwort nicht unbedingt und für alle Fälle gleich sein wird, wie denn überhaupt unsere vereinfachten Begriffe und Bezeichnungen meist nur gewisse Grenzfälle richtig treffen, ohne der Komplexität der Erscheinungen im allgemeinen gerecht zu werden. So verliert die Bezeichnung des einfallenden und reflektierten Lichtes bei allgemeineren optischen Problemen ihren präzisen Sinn und geht in den Begriff des optischen Feldes der Beugungerscheinungen auf. Ähnlich gibt es in unserem Falle Übergänge zwischen Raum- und Oberflächenwellen und wird eine scharfe Sonderung beider im allgemeinen unmöglich.

Immerhin treten genau die Uller-Zenneckschen Oberflächenwellen als ein wesentlicher und unter gewissen Umständen überwiegender Bestandteil des elektromagnetischen Feldes hervor, begleitet von Raumwellen, welche unter gewissen anderen Umständen ihrerseits überwiegen.

Wir haben zunächst das mathematische Problem zu skizzieren, welches die Grundlage unserer Diskussion bildet. Es handelt sich gewissermaßen darum, den leuchtenden Punkt der Hertzschen Lösung in zwei Teile zu spalten, eine dem Medium 1 und eine dem Medium 2 entsprechende Hälfte, und beide Teile vermöge der Grenzbedingungen zwischen 1 und 2 aneinander anzupassen; oder anders ausgedrückt, das Hertz'sche Π durch ein Funktionenpaar Π_1 , Π_2 zu ersetzen, das durch Differentialgleichungen und Grenzbedingungen bestimmt wird und von dem an der Erregungsstelle $R = 0$ sich Π_1 wie eine Hertzsche Lösung in 1, Π_2 wie eine solche in 2 verhält. Eine so weitgehende Vereinfachung der tatsächlichen Verhältnisse ist natürlich nur für solche Entfernung zulässig, von denen aus die Antenne als Erregungspunkt erscheint, die also groß gegen die Wellenlänge der Schwingung sind. Wie sich das Feld in der unmittelbaren Umgebung des Senders verhält, kann und will unsere Theorie nicht beschreiben. Das Problem ist durch die hier genannten und einige ergänzende Bedingungen eindeutig bestimmt und wird, die Trennungsfläche als eben vorausgesetzt, in Strenge gelöst durch die übersichtliche Form je eines bestimmten Integrales für Π_1 und Π_2 , welches aus einer Besselschen und einer Exponentialfunktion gebildet ist, §§ 2 und 3. Der Diskussion dieser Lösung ist alles Folgende gewidmet. §§ 4, 5 und 6 operiert in der komplexen Ebene und zerlegt die strenge Lösung durch Deformation des Integrationsweges in drei Bestandteile, welche zum Teil näherungsweise, zum Teil in Strenge ausgeführt werden. §§ 7 und 8 sucht dasselbe Ziel durch Reihenentwicklung zu erreichen.

Bei dieser Diskussion tritt ein besonders wichtiges Element unserer Theorie hervor, das wir die *numerische Entfernung* des Aufpunktes vom Sender nennen. Es zeigt sich nämlich, daß Größe und Charakter der übertragenen Wirkung nicht so sehr von der *absoluten Entfernung* r (diese etwa gemessen gedacht

in Einheiten der Wellenlänge) abhängt, als vielmehr von einer reinen Zahl ϱ — eben unserer numerischen Entfernung —, die sich aus r und den Materialkonstanten k_1 , k_2 berechnet. In dem Auftreten dieser Größe haben wir eine Art Ähnlichkeitsgesetz der drahtlosen Telegraphie zu sehen, welches sich aber hier nicht direkt aus den Differentialgleichungen des Problems, sondern erst aus ihren Integralen entnehmen läßt, wie schon daraus hervorgeht, daß es nicht in Strenge und allgemein, sondern nur mit Annäherung in der Nähe der Erdoberfläche gilt. Wir definieren:

$$(a) \quad \varrho = \left| \frac{k_1^4}{k_2^4} \frac{k_1^3 - k_2^3}{k_1^2} \frac{k_1 r}{2} \right|.$$

In dem besonderen Fall, wo k_1 reell (ungedämpfte¹⁾ Schwingungen in Luft) k_2 rein imaginär (σn zu vernachlässigen gegen σ) und k_1^2 klein gegen $|k_2^2|$ ist, kann man für ϱ einfacher schreiben:

$$(b) \quad \varrho = \frac{k_1^3}{(-i k_2^3)} \frac{k_1 r}{2},$$

Die numerische Entfernung ϱ wächst also mit der absoluten Entfernung r , ist aber bei gleichem r über Seewasser ($|k_2^2/k_1^2|$ groß) viel kleiner als über Land- oder Süßwasser.

Wir berichten zunächst kurz über den mathematischen Gedankengang unserer Diskussion der allgemeinen Lösung.

In der komplexen Ebene der Integrationsvariablen — sie heiße λ — gibt es einen ausgezeichneten Punkt, in dem der Integrand einfach unendlich wird. Dieser „Pol“ liegt genau bei dem oben angegebenen Werte $\lambda = s$. Das zugehörige „Residuum“, welches den Wert des Integrales bei einem Umgang um diesen Pol angibt, liefert einen ersten Bestandteil P unserer Lösung und geht für große Werte von r genau in die oben genannten Oberflächenwellen über. Das Vorhandensein jenes Poles und das Auftreten dieser Wellen ist an eine Ungleichung zwischen den Materialkonstanten beider Medien geknüpft. Indem

1) Zeitlich gedämpfte Schwingungen entsprechen einem komplexen n und daher auch einem komplexen k_1 , wobei aber auch bei den ursprünglichen Einfach-Antennen der imaginäre Teil von n und k_1 immer noch klein ist gegen den reellen. Wegen der Schwierigkeit, die gedämpfte Schwingungsform für alle Werte von t als gültig anzusetzen, vgl. z. B. meine Arbeit über Drahtwellen Wied. Ann. 67. p. 240. 1899.

gezeigt wird, daß diese unter den Verhältnissen der drahtlosen Telegraphie stets erfüllt ist, wird der Existenzbeweis für die Oberflächenwellen erbracht. Zwei weitere Bestandteile Q_1 und Q_2 unserer allgemeinen Lösung ergeben sich als Umgänge um zwei in der komplexen Ebene anzubringende „Verzweigungsschnitte“ und haben den Charakter von *Raumwellen* des Mediums 1 oder 2, da ihre Fortpflanzung in 1 oder 2 allein durch die Materialkonstanten dieses Mediums bestimmt wird. Der so gefundene Ausdruck für die Raumwellen Q_1 ist nur als erste Näherung bei unendlich wachsendem r anzusehen. Die Reihenentwickelung des § 6 fügt demselben eine unendliche Serie weiterer Glieder hinzu, deren jedes sich auffassen läßt als Wirkung einer an der Erregungsstelle supponierten höheren Singularität, entstanden durch das Zusammenwirken von zwei oder mehreren Dipolen. Diese Reihe schreitet nach *negativen Potenzen der numerischen Entfernung* fort und ist nur brauchbar (semi-konvergent) für *große Werte* dieser Größe. Als Ergänzung dazu gibt § 7 eine Reihenentwickelung, die nach *positiven Potenzen der numerischen Entfernung* geordnet ist und welche sich deuten läßt als Superposition der Wirkung eines einfachen „leuchtenden Punktes“, einer an der Erregungsstelle endigenden „leuchtenden Linie“ von gleichmäßiger, von Dreiecks-, Parabelbelegung usf. Diese Reihe ist, obschon für alle Werte von ϱ konvergent, doch nur für *kleine numerische Entfernungen* zweckmäßig. (Die absolute Entfernung r wird aus oben genannten Gründen natürlich auch hier als groß vorausgesetzt.) Insbesondere dient diese Reihe dazu, den *Abrahamschen Grenzfall des vollkommenen Leiters* ($|k_3| = \infty$, $\varrho = 0$) in unsere Theorie einzuordnen. Beide Reihen sind übrigens nicht in demselben Sinne streng, wie die ursprüngliche Lösung, sondern unter gewissen praktisch berechtigten Vernachlässigungen abgeleitet; für die unmittelbare Nähe der Erdoberfläche lassen sich beide in eine geschlossene Form summieren, welche für die numerische Berechnung und graphische Darstellung sehr bequem ist.

Nach dieser allgemeinen Übersicht heben wir einige praktische Konsequenzen unserer Theorie hervor.

1. Die *Eindeutigkeit* unseres Problems bei vorgegebener axial-symmetrischer Erregung läßt einen allgemeinen Schluß auf den Einfluß zu, den die besondere Anordnung des Senders,

seine mehr oder minder innige Erdung, seine Ausbildung als einfaches oder gekoppeltes System usw. haben kann. In unserer Lösung bleibt unbestimmt nur die (bei Dämpfung komplexe) Frequenz n und eine allen unseren Formeln hinzuzufügende multiplikative Konstante C , die die Intensität des Vorganges mißt; ihrem Quadrat ist die aufzuwendende Energie proportional. Nur diese beiden Konstanten n und C können durch die Besonderheiten des Senders beeinflußt werden, während der Ausbreitungsvorgang als solcher davon unabhängig verläuft. Es ist bekannt, daß Frequenz und Dämpfung (also unsere Konstante n) durch Selbstinduktion, Kapazität und Widerstand der Stromkreise des Senders bestimmt werden. Dasselbe gilt von dem Wirkungsgrad der im Sender aufgewendeten Energie (also unserer Konstanten C). Was die Erdung betrifft, so fällt die Frage, wie sie Frequenz und Dämpfung, Stromverteilung und Stromamplitude auf der Antenne beeinflußt, außerhalb des Rahmens unseres Problems. Einen Einfluß auf die *Form des Wellenvorganges*, seine *Abnahme mit der Entfernung* usw. dagegen müssen wir, eben wegen der Eindeutigkeit unseres Problems, für ausgeschlossen erklären — entgegen früher vertretenen Ansichten, aber in Übereinstimmung mit der Erfahrung.¹⁾ Insbesondere kann die Erdung nicht, wie man etwa denken könnte, die flächenhafte Ausbreitung der elektrischen Störung auf Kosten der räumlichen Ausbreitung begünstigen. Vielmehr ist das Verhältnis zwischen Oberflächen- und Raumwellenanteil von der Erdung und überhaupt von der Anordnung des Senders unabhängig.

Bei diesen Schlüssen ist allerdings nur die Rede von solchen Antennen, deren Wirkung sich mit einem einfachen, allseitig symmetrischen Dipol identifizieren läßt. Es sind dies höchstwahrscheinlich alle heute gebrauchten symmetrischen Antennen, deren Höhe stets sehr klein gegen die Wellenlänge der Schwingung ist. Bei den früheren Antennen, die gleich ein Viertel Wellenlänge oder damit vergleichbar waren, bedingt die Stromverteilung auf dem Sender Abweichungen von dem

1) Man vgl. J. Zenneck, Elektrische Schwingungen p. 810, Nr. 420, wonach zwei vergleichbare Antennen, d. h. zwei Antennen von gleicher Stromverteilung und Stromamplitude identisch wirken, gleichviel, ob sie geerdet sind oder nicht.

Verhalten des Dipols. Bei unsymmetrischer Anordnung des Senders (vgl. unten unter Nr. 8) treten natürlich ebenfalls Abweichungen von der Symmetrie des Dipols auf (Längenabweichungen, während wir die vorher genannten als Breitenabweichungen bezeichnen können, die Achse des Dipols als Polarachse gedacht). Offenbar entspricht solchen Antennen ein anderes Feld wie den Antennen mit Dipolsymmetrie, das aber ebenso wie dieses von uns zu untersuchende Feld durch die Symmetrieeigenschaften eindeutig und unabhängig von den Besonderheiten der Anordnung bestimmt sein wird.

2. Die Größe der *numerischen Entfernung* und damit zugleich der Charakter der Wellen wird sehr wesentlich bestimmt durch die Bodenbeschaffenheit. Nimmt man beispielsweise die absolute Entfernung gleich $\frac{1}{4}$ Erdquadrant (entsprechend etwa der Marconischen transatlantischen Station) und die Wellenlänge der Schwingung gleich 2 km (entsprechend der deutschen Station Nauen), so ergibt sich nach gewissen runden Daten von Zenneck (Näheres vgl. § 9)

für Seewasser Süßwasser Nasser Boden Trockener Boden

$$\varrho = \frac{1}{30}, \quad \varrho = 30, \quad \varrho = 6,5, \quad \varrho = 300.$$

Entsprechend der ganz verschiedenen *Größenordnung* dieser Zahlen haben wir in diesen Fällen auch eine durchaus verschiedene Größenordnung der telegraphischen Wirkung und ein ganz verschiedenes Bild des Wellenvorganges zu erwarten.

3. Durch Vergrößerung der Wellenlänge l (Verkleinerung der Frequenz) wird der Wert von ϱ verkleinert, in dem Sonderfalle der Formel (b) sogar quadratisch, weil sich k_1 wie $1/l$ und $(-ik_2^2)$ ebenfalls wie $1/l$ verhält. Durch Verkleinerung von ϱ nähern wir uns aber dem idealen Falle des vollkommenen Leiters ($\varrho = 0$). Wir schließen daraus, daß eine *Vergrößerung der Wellenlänge für die Überwindung großer Entfernungen günstig* sein wird, wie die Praxis längst ergeben hat. Übrigens würde die früher von Marconi angegebene Regel, nach der man bei vertikaler Einfach-Antenne ihre Höhe und damit die Wellenlänge mit der Quadratwurzel aus der zu überwindenden Entfernung wachsen lassen soll, nach dem soeben Gesagten gerade der Forderung entsprechen, *trotz wachsender absoluter Entfernung die numerische Entfernung festzuhalten*.

Dagegen bleibt die günstige Wirkung der Vergrößerung der Wellenlänge nach der Theorie des vollkommenen Leiters unverständlich; hiernach würde vielmehr — bei vorgegebener Spannung und Antenne — eine Vergrößerung der Wellenlänge das Feld in der Entfernung r ungünstig beeinflussen.

4. Auch die Frage nach dem Gültigkeitsbereich der Annahme eines vollkommen leitenden Erdbodens erweist sich im Grunde als eine Frage nach der Größe der numerischen Entfernung, indem sich ja auch aus unserer Theorie für hinreichend kleine numerische Entfernung der Abrahamsche Grenzfall des vollkommenen Leiters ergibt. Behalten wir von der Reihe des § 7 außer jenem Grenzgliede noch das nächstfolgende Glied als Korrektion bei, so lautet unsere Lösung für das erste Medium

$$\Pi_1 = (1 - i\sqrt{\rho\pi}) \frac{e^{ik_1 r}}{r}$$

bei Beschränkung auf die Erdoberfläche ($R = r$) und einen für die Abschätzung bequemen Sonderfall. Lassen wir 10 Proz. Abweichung vom Grenzfall des vollkommenen Leiters zu, so ist zu verlangen $\sqrt{\rho\pi} < 1/10$. Hieraus ergibt sich (vgl. § 9) bei Seewasser und $l = 2$ km bzw. $l = 1/3$ km als diejenige absolute Entfernung, in der die Annahme vollkommener Leitfähigkeit hinreichend genau ist,

$$r = 240 \text{ km} \quad \text{bzw.} \quad r = 8 \text{ km},$$

während die entsprechende Entfernung bei anderer Bodenbeschaffenheit unterhalb einer Wellenlänge liegt und daher überhaupt nicht in Betracht kommen würde. Die Annahme vollkommener Leitfähigkeit ist also nur bei Seewasser innerhalb eines sehr engen Bereiches erlaubt.

5. Dem Charakter der Oberflächenwellen entspricht es, daß der Bestandteil P unserer Lösung (s. o.) nur wie $1/\sqrt{r}$ mit wachsendem r abnimmt (wenn man von der hinzukommenden radialen Dämpfung absieht). In der Tat wird bei flächenhafter Ausbreitung der Energie diese wie $1/r$ abnehmen, da durch Kreise (oder zugehörige Zylinder), die um den Erregungspunkt mit verschiedenem Radius geschlagen sind, dieselbe Energie hindurchgeht. Daraus folgt aber, daß die Amplitude des Feldes sich wie $1/\sqrt{r}$ verhält. Andererseits wird bei räum-

licher Energiestrahlung im einfachsten Falle diese wie $1/r^2$, die Amplitude des Feldes wie $1/r$ abnehmen, wie es u. a. die Abrahamsche Behandlung des vollkommenen Leiters zeigt. Bemerkt sei noch, daß unsere Raumwellen Q (s. o.) mit wachsendem r nicht wie $1/r$, sondern wie $1/r^2$ abnehmen. Den Grund hierfür haben wir wohl darin zu sehen, daß unsere Raumwellen Q nur im Verein mit unseren Oberflächenwellen P auftreten können, denen sie fortgesetzt Energie nachzuliefern haben.

Offenbar ist die geringe Abnahme der Oberflächenwellen mit r für die Praxis der Zeichenübertragung bedeutsam. Nur ist zu beachten, daß die mit den Oberflächenwellen notwendig verknüpfte Absorption im zweiten Medium eine *radiale Dämpfung* bewirkt, welche exponentiell fortschreitet, und die Oberflächenwellen schließlich stärker zu Null gehen läßt, als selbst die Raumwellen. Diese radiale Dämpfung, die schon in den ebenen Wellen von Uller und Zenneck auftritt, hat ihren Grund in der komplexen Beschaffenheit von s und kann (in dem Sonderfalle $|k_3| \ll |k_1|$) einfach gemessen werden durch e^{-c} .

6. Über die *relative Bedeutung des Raum- und Oberflächenwellen-Bestandteiles unserer Lösung* orientiert Fig. 8 in § 9, die sich auf die unmittelbare Nähe der Erdoberfläche und auf den mehrfach genannten bequemen Spezialfall k_3^2 rein imaginär und $|k_3^2| \gg k_1^2$ bezieht. Sie zeigt, daß für sehr kleine numerische Entfernungen der Raumwellentypus überwiegt (entsprechend Nr. 4), daß für wachsende ϱ der Oberflächentypus vorherrscht (entsprechend Nr. 5, erster Absatz), während von einem gewissen ϱ ab dieser wieder hinter jenen zurücktritt (entsprechend Nr. 5, zweiter Absatz). Bemerkt muß dabei werden, daß die Trennung in Raum- und Oberflächenwellen, wie sie diese Figur gibt (durch den reellen und imaginären Teil der oben erwähnten geschlossenen Form unserer Lösung), nur bis auf einen Zahlenfaktor 2 mit der durch die Betrachtung in der komplexen Ebene gegebenen Trennung in P und Q übereinstimmt. Jedenfalls aber tritt auch aus dieser Figur die Bedeutung der Oberflächenwellen hervor.

7. Unsere Theorie setzt eine ebene Trennungsfläche voraus. Es würde nicht schwer sein, die strenge Lösung auf den Fall der gekrümmten Erdoberfläche zu erweitern; nur die Dis-

kussion der so entstehenden Reihe nach Kugel- und Zylinderfunktionen würde Weiterungen verursachen. Aber auch ohne Kenntnis dieser Lösung läßt sich wohl so viel sagen, daß durch die Erdkrümmung die Verhältnisse zu Gunsten der Oberflächenwelle verschoben werden, da durch die Erdkrümmung die Raumwellen abgeschirmt werden, soweit sie dieselbe nicht durch einen Beugungsprozeß überwinden, die Oberflächenwellen aber nicht nennenswert behindert werden. Es ist sehr wohl möglich, daß das schließliche Überwiegen der Raumwellen durch die Erdkrümmung aufgehoben und diese nur mehr für sehr kleine numerische Entfernungen vor den Oberflächenwellen vorherrschen. In den populären Schriften über drahtlose Telegraphie (z. B. Poincaré) scheint übrigens der Einfluß der Beugung als das die Erdkrümmung überwindende Moment überschätzt zu werden. Wenn dort auf die Größe der Wellenlänge hingewiesen wird, mit der die Stärke der Beugung zunimmt, so ist andererseits daran zu erinnern, daß es immer nur auf das Verhältnis der Wellenlänge zum Krümmungsradius des zu überwindenden Hindernisses ankommt und daß dieses Verhältnis für die Wellen der drahtlosen Telegraphie und die Erdkrümmung nicht günstiger liegt wie für sichtbares Licht und eine mäßig abgerundete Kante.

8. Auch die Möglichkeit der *gerichteten Telegraphie* im Sinne Marconis (durch einen geknickten Sender) wird sich durch eine Erweiterung unserer Theorie unschwer erklären lassen. Es ist nur nötig, die symmetrische Erregung, die dem skalaren Hertzschén Potential $\Pi = e^{ikR}/R$ entspricht, zu ersetzen durch eine einseitige unsymmetrische, die durch ein vektorielles Hertzschén Potential, einen „Hertzschén Vektor“ in der Bezeichnung von Abraham, gegeben wird. Dem Marconischen Sender mit vertikalem Schenkel a (positive z -Richtung) und horizontalem Schenkel b (negative x -Richtung), welcher eine bevorzugte Aussendung nach der positiven x -Richtung ergibt, würde z. B. der Hertzsché Vektor

$$\Pi_x = -a b \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad \Pi_y = 0, \quad \Pi_z = a \frac{e^{ikR}}{R}$$

als primäre Erregung entsprechen.

Den Schluß der Arbeit bildet ein Vergleich unserer

Oberflächenwellen mit den *elektrodynamischen Drahtwellen* und mit gewissen *optischen Tatsachen*. In ersterer Hinsicht ergibt § 10, daß unsere Oberflächenwellen aus denjenigen Formeln entstehen, die ich für die Theorie der Drahtwellen vor zehn Jahren entwickelt habe, wenn man den Drahtradius ∞ setzt. Ferner wird hier (nach energetischer Definition) eine Formel für den *Widerstand* der Erde pro Flächeneinheit aufgestellt, analog der Rayleighschen bei Drahtwellen, und für ihre *Kapazität* („dynamische Kapazität“, die wesentlich höher ist als die statisch gerechnete für die Flächeneinheit der Erdkugel). In dem optischen § 11 wird das Auftreten *inhomogener* Wellen, wie sie von der *Totalreflexion* her bekannt sind, hervorgehoben sowohl als Bestandteil unserer allgemeinen Lösung, die sich als ein Bündel gewöhnlicher, homogener, zusammen mit einem Bündel totalreflektierter, inhomogener Wellen deuten läßt, wie auch bei unseren speziellen Wellentypen *P* und *Q*. Was insbesondere unsere Oberflächenwelle *P* in großer Entfernung vom Ursprung betrifft, wo sie als ebene und zwar als ebene homogene Welle gelten kann, wenn hierbei der bequemeren Ausdrucksweise wegen von der Absorption in Erde abgesehen wird, so erweist sich deren Struktur als unmittelbar bestimmt durch das Brewstersche Gesetz: *im ersten Medium eine unter dem Polarisationswinkel einfallende, senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Welle, und daher kein reflektierter Strahl, im zweiten Medium eine unter dem Komplement des Polarisationswinkels gebrochene Welle, deren Strahlrichtung senkrecht zu dem (nicht vorhanden) reflektierten Strahl liegt.*

§ 2. Problemstellung.

Die beiden Medien 1 (Luft) und 2 (Erde) stoßen in der Ebene $z = 0$ aneinander (Fig. 1). $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ sind Dielektrizitätskonstante, Permeabilität und Leitfähigkeit für Luft, $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$ für Erde, so daß σ_1 sehr klein, σ_2 relativ groß ist. Wir benutzen die Abkürzungen

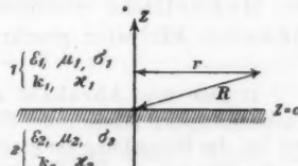


Fig. 1.

1) W. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik 2. § 13. p. 629.

$$(1) \quad \begin{cases} k_1^2 = \frac{s_1 \mu_1 n^2 + i n \mu_1 \sigma_1}{c^2}, & x_1^2 = \frac{k_1^2}{\mu_1}, \\ k_2^2 = \frac{s_2 \mu_2 n^2 + i n \mu_2 \sigma_2}{c^2}, & x_2^2 = \frac{k_2^2}{\mu_2}, \end{cases}$$

c = Lichtgeschwindigkeit, n = Schwingungszahl in 2π Zeit-einheiten, wobei wir den Zeitfaktor des (rein-periodisch und harmonisch gedachten) Wellenvorganges in der Form

$$e^{-int}$$

denken. Hiermit gleichberechtigt wäre natürlich der Ansatz e^{+int} , bei dem in k_1^2 , k_2^2 und allen folgenden Formeln das Vorzeichen von i umzukehren wäre. Der reelle Teil unserer komplexen Ausdrücke, den wir ja schließlich meinen, wird ersichtlich durch das Vorzeichen von i nicht beeinflußt, da er gleich der halben Summe der beiden konjugierten Ausdrücke ist. Beim Ausziehen der Wurzel soll das Vorzeichen so gewählt werden, daß k_1 , k_2 im ersten Quadranten der komplexen Ebene liegen.

Die Erregungsstelle sei $z = 0$, $r = 0$, und unser Vorgang axial symmetrisch um die z -Achse. Die magnetischen Kraftlinien verlaufen überall als Kreise um, die elektrischen Kraftlinien in Ebenen durch diese Achse. Wie schon Hertz gezeigt hat, lassen sich dann die Komponenten von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} durch eine einzige charakteristische Funktion Π , die „Hertzsche Funktion“, ausdrücken.¹⁾ Wegen $\mathfrak{H}_z = 0$, $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$ setzen wir:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} &= - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y}, \\ \mathfrak{H}_x &= \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad \mathfrak{H}_y = - \frac{\partial \Pi}{\partial x}. \end{aligned}$$

Die Maxwellsche Gleichung $\varepsilon \dot{\mathfrak{E}} + \sigma \mathfrak{E} = c \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{H}$ (in Heavisideschen Einheiten geschrieben) liefert dann

1) Das von Abraham als „Hertzscher Vektor“ eingeführte Funktionstriple β (Theorie der Elektrizität 2. 2. Aufl. p. 276) würden wir erst bei der Behandlung der gerichteten Telegraphie (vgl. Einleitung unter Nr. 8) nötig haben. Der Hertzsche Vektor wird bei unserer Symmetrie überall der z -Achse parallel und reduziert sich auf unsere Hertzsche Funktion. Übrigens entspricht unser Π nicht genau dem Abrahamschen β , sondern der Ableitung $\partial \beta / c \partial t = ik \beta$.

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{i n \epsilon + \sigma}{c} \mathfrak{E}_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}, \quad \mathfrak{E}_z = \frac{i n}{c} \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}, \\ -\frac{i n \epsilon + \sigma}{c} \mathfrak{E}_y = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{i n}{c} \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}, \\ -\frac{i n \epsilon + \sigma}{c} \mathfrak{E}_z = -\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \right), \\ \mathfrak{E}_z = -\frac{i n}{c} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \right). \end{array} \right.$$

Die Resultierende von \mathfrak{E}_x und \mathfrak{E}_y steht senkrecht auf der r -Richtung und hat die Größe

$$(2a) \quad \mathfrak{H} = \frac{\partial \Pi}{\partial r};$$

die Resultierende von \mathfrak{E}_x und \mathfrak{E}_y hat die Richtung von r und die Größe

$$(3a) \quad \mathfrak{E}_r = \frac{i n}{c} \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial z}.$$

Die andere Maxwellsche Gleichung $\mu \dot{\mathfrak{H}} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}$ verlangt endlich, daß Π die Differentialgleichung befriedigt:

$$(4) \quad \Delta \Pi + k^2 \Pi = 0.$$

In den Gleichungen (2), (3), (4) sind Π , k und x mit den Indizes 1 und 2 zu versehen, je nachdem $z > 0$ oder $z < 0$.

In der Grenzebene $z = 0$ gelten die Bedingungen $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{E}_{1r} = \mathfrak{E}_{2r}$. Sie sind erfüllt, wenn wir längs dieser ganzen Ebene verlangen:

$$(5) \quad \Pi_1 = \Pi_2, \quad \frac{1}{x_1^2} \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = \frac{1}{x_2^2} \frac{\partial \Pi_2}{\partial z}.$$

Bekanntlich lautet diejenige Lösung von (4), welche einer punktförmigen Energiequelle entspricht:

$$(6) \quad \Pi = \frac{e^{ikR}}{R}, \quad R^2 = r^2 + z^2.$$

Sie liefert, mit dem Zeittfaktor e^{-int} multipliziert, Wellen, die mit wachsendem t nach außen eilen. Eine Quelle dieser Art werden wir an der Erregungsstelle, und zwar im Luftraum sowohl wie in Erde, als schematische Darstellung der Funkenstrecke, Antenne und Erdleitung zugrunde legen.

Unser Problem formuliert sich nun mathematisch folgendermaßen: Es wird ein Funktionenpaar Π_1, Π_2 für $z > 0$ bzw. $z < 0$ gesucht, welches den Bedingungen genügt:

$$(I) \quad \begin{cases} \Delta \Pi_1 + k_1^2 \Pi_1 = 0 & \dots z > 0, \\ \Delta \Pi_2 + k_2^2 \Pi_2 = 0 & \dots z < 0, \end{cases}$$

$$(II) \quad \Pi_1 = \Pi_2, \quad \frac{1}{x_1^2} \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = \frac{1}{x_2^2} \frac{\partial \Pi_2}{\partial z} \quad \dots z = 0,$$

$$(III) \quad \begin{cases} \Pi_1 = 0 & \dots z > 0, \\ \Pi_2 = 0 & \dots z < 0, \end{cases} \quad r = \infty \quad \text{und} \quad z = +\infty, \quad r = \infty \quad \text{und} \quad z = -\infty,$$

$$(IV) \quad \begin{cases} \Pi_1 - \frac{e^{ik_1 R}}{R} & \text{für } z \geq 0 \\ \Pi_2 - \frac{e^{ik_2 R}}{R} & \text{,, } z \leq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{endlich und stetig mitsamt} \\ \text{den ersten Ableitungen} \\ \text{einschl. der Stelle } R = 0. \end{array}$$

Daß wir die Art des Unendlichwerdens für $R = 0$ in beiden Medien durch die Funktion $e^{ik_{1,2} R}/R$ und zwar beidemal mit dem gleichen Faktor (der in (IV) gleich 1 gewählt wurde) festlegen, ist keine Willkür. In der Tat wird diese Gleichheit durch die Grenzbedingungen (III) verlangt, welche bis in die unmittelbare Nähe von $R = 0$ ihre Gültigkeit behalten müssen. Willkürlich bleibt nur die Größe dieses gemeinsamen Faktors, welcher die Größe des Energieaufwandes im Sender mißt und gleich ist dem Produkt aus der Frequenz, der Höhe der Antenne, ihrer Kapazität und der angelegten Spannung.

Nach den Greenschen Methoden läßt sich zeigen, daß durch die Bedingungen (I) bis (IV) das Funktionenpaar Π_1, Π_2 eindeutig bestimmt ist. Da der Beweisgang wegen der komplexen Beschaffenheit der Π von dem üblichen etwas abweicht und ein praktisches Interesse für die Wirkung der Erdung (vgl. Einleitung unter Nr. 1) beanspruchen darf, möge er angedeutet werden.

Es seien Π_1, Π_2 und Π'_1, Π'_2 zwei als verschieden vorausgesetzte Lösungen. Die konjugierten Lösungen, die durch Vertauschung von $+i$ mit $-i$ entstehen, heißen $\bar{\Pi}_1$ usw. Ferner seien u_1, u_2 die Differenzen $\Pi_1 - \Pi'_1, \Pi_2 - \Pi'_2$ und \bar{u}_1, \bar{u}_2 die Differenzen der konjugierten Lösungen.

Wir gehen aus von der Greenschen Gleichung:

$$\int u \Delta v dS + \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dS = \int u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma.$$

Bei ihrer Anwendung auf den Halbraum 1 sei $u = u_1$, $v = \bar{u}_1$. Wegen (I) wird die linke Seite:

$$-\bar{k}_1^2 \int u_1 \bar{u}_1 dS + \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \dots \right) dS,$$

wo also beide Raumintegrale reell sind, das erste aber mit einem im allgemeinen komplexen Faktor versehen ist.

Die rechte Seite zerfällt in drei Teile: ein Oberflächenintegral über eine unendlich kleine Halbkugel (Radius ϱ), welche den singulären Punkt $R = 0$ von 1 ausschließt, ein Oberflächenintegral über eine unendlich große Halbkugel (Radius P), welche 1 nach außen begrenzt, ein Integral über den zwischen beiden Halbkugeln enthaltenen Teil der Grenzfläche $z = 0$.

Der erste Teil verschwindet wie ϱ^2 . Nach (IV) ist nämlich nicht nur die Differenz zwischen jeder unserer Lösungen und der primären Erregung, sondern auch ihre gegenseitige Differenz u und deren in beliebiger Richtung genommener Differentialquotient für $R = 0$ endlich.

Der zweite Teil verschwindet ebenfalls. Bei komplexem k reicht nämlich die Forderung (III) aus, um ein exponentielles Verschwinden im Unendlichen zu sichern, so daß auch das Produkt solcher Exponentialgrößen in die Oberfläche der unendlich großen Kugel verschwindet. (Bei realem k müßte man (III) in bekannter Weise dahin ergänzen, daß Π und also auch u , \bar{u} von höherer Ordnung als $1/P$ verschwinden.)

Es bleibt also nur der dritte Teil des Oberflächenintegrals übrig und die Greensche Gleichung reduziert sich auf:

$$-\bar{k}_1^2 \int u_1 \bar{u}_1 dS + \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \dots \right) dS = \int_{z=0} u_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n} d\sigma.$$

Bei entsprechender Bedeutung von u_2 und \bar{u}_2 ergibt sich für den Halbraum 2:

$$-\bar{k}_2^2 \int u_2 \bar{u}_2 dS + \int \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \dots \right) dS = \int_{z=0} u_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial n} d\sigma.$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $1/\bar{x}_1^2$, die zweite mit $1/\bar{x}_2^2$ und addieren. Dabei verschwindet die Summe der rechten Seiten wegen (II) — man beachte, daß in der ersten Zeile $\partial/\partial n = -\partial/\partial z$, in der zweiten $\partial/\partial n = +\partial/\partial z$ ist — und es folgt:

$$\begin{aligned} \mu_1 \int u_1 \bar{u}_1 dS + \mu_2 \int u_2 \bar{u}_2 dS \\ = \frac{1}{\bar{x}_1^2} \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \dots \right) dS + \frac{1}{\bar{x}_2^2} \int \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \dots \right) dS. \end{aligned}$$

Hier ist die linke Seite reell, die rechte komplex wegen der komplexen Beschaffenheit von \bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2 , wobei der imaginäre Teil in beiden Termen das gleiche Vorzeichen hat. Da er verschwinden muß, so verschwinden die Integrale der rechten Seite einzeln. Man schließt daraus unmittelbar auf $\Pi_1 = \Pi'_1$, $\Pi_2 = \Pi'_2$.

Auch wenn eines der beiden Medien ein reelles k^2 besitzt, würde der Schluß nicht hinfällig werden. Haben aber beide Medien reelles k^2 , so ist unsere Behauptung selbst nicht mehr richtig, weil sich dann unserer Lösung Eigenschwingungen des ganzen Raumes überlagern können, die die Eindeutigkeit des Problems aufheben.

§ 3. Allgemeine Lösung des Problems.

Wir schicken zwei Bemerkungen voran:

1. Eine Lösung der Differentialgleichung (4) mit einem willkürlichen Parameter λ lautet:

$$(7) \quad CJ(\lambda r) e^{\sqrt{\lambda^2 - k^2} z}.$$

J bedeutet die überall endliche Besselsche Funktion vom Index 0. Diese Lösung reduziert sich, was für die Erfüllung der Grenzbedingungen wichtig ist, für $z = 0$ auf die von der Materialkonstanten k des Mediums unabhängige Größe CJ . Damit sie für $z > 0$ bzw. $z < 0$ und für alle positiven Werte von λ endlich bleibt, ist das Vorzeichen von $\sqrt{\lambda^2 - k^2} z$ so zu wählen, daß stets $\sqrt{\lambda^2 - k^2} z$ einen negativen reellen Teil habe. Um dies deutlicher zum Ausdruck zu bringen, schreiben wir

statt (7), indem wir die willkürliche Konstante C als eine willkürliche Funktion von λ auffassen:

$$(8) \quad \begin{cases} f_1(\lambda) J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} & \dots z > 0, \\ f_2(\lambda) J(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} & \dots z < 0, \end{cases}$$

mit der Festsetzung, daß beidemal das Vorzeichen der Wurzel so gewählt werde, daß ihr reeller Teil positiv sei.

2. Unsere spezielle Funktion (6) läßt sich als eine Summe von Lösungen der Form (8) auffassen. Es ist nämlich:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{e^{ik_1 R}}{R} = \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} & \dots z > 0, \\ \frac{e^{ik_1 R}}{R} = \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} J(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} & \dots z < 0. \end{cases}$$

Zum Beweise bemerken wir, daß für eine beliebige Funktion von r ($0 < r < \infty$) die Besselsche Integraldarstellung¹⁾ gilt:

$$F(r) = \int_0^\infty \lambda d\lambda \int_0^\infty \varrho d\varrho F(\varrho) J(\lambda \varrho) J(\lambda r).$$

Dieselbe folgt unmittelbar aus der Fourierschen Integraldarstellung für eine Funktion $F(x, y)$, wenn die darzustellende Funktion nur von $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ abhängt.²⁾

Setzen wir $F(r) = e^{ikr}/r$, d. h. gleich demjenigen Wert, auf den sich (6) für $z = 0$ reduziert, so folgt:

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \int_0^\infty \lambda d\lambda \int_0^\infty \varrho d\varrho e^{ik\varrho} J(\lambda \varrho) J(\lambda r).$$

Die Integration nach ϱ läßt sich ausführen und liefert³⁾

$$\int_0^\infty d\varrho e^{ik\varrho} J(\lambda \varrho) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}},$$

1) Vgl. z. B. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, § 140.

2) Vgl. z. B. meine Diss.: Die willkürlichen Funktionen in der mathematischen Physik, Kap. II, Königsberg 1892.

3) Vgl. Nielsen, l. c. § 74, Gl. (1) bis (4). Sehr viel einfacher gewinnt man die fragliche Formel bei komplexem k , wenn man für J seine Integraldarstellung benutzt und die Integration in der komplexen Ebene ausführt.

also

$$(10) \quad \frac{e^{ikr}}{r} = \int_0^{\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} J(\lambda r).$$

Will man diese Funktion von r gemäß der Differentialgleichung $\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0$ für $z > 0$ bzw. $z < 0$ fortsetzen, so hat man nur rechterhand unter dem Integralzeichen den Faktor $e^{\mp \sqrt{\lambda^2 - k^2} z}$ hinzuzufügen. Dabei muß linkerhand die Funktion e^{ikR}/R entstehen. Man bestätigt dies leicht für $r = 0$ durch direkte Ausführung der Integration. Nimmt man noch $k = k_1$ bzw. k_2 , so ergeben sich die zu beweisenden Gleichungen (9).

Indem wir zu dem Problem vom Ende des vorigen Paragraphen zurückkehren, setzen wir Π_1 , Π_2 aus einer „primären“ und „sekundären Erregung“ zusammen. Erstere entspricht der alleinigen Wirkung der Quelle und wird dargestellt durch das erste Glied auf der rechten Seite der folgenden Ausdrücke, letztere röhrt her von der Wirkung der Erdoberfläche, ihrer Ladung und der damit zusammenhängenden Brechung der Kraftlinien usw., und wird gegeben durch das zweite Glied:

$$(11) \quad \begin{cases} \Pi_1 = \frac{e^{ik_1 R}}{R} + \int_0^{\infty} f_1(\lambda) J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} \lambda d\lambda, \\ \Pi_2 = \frac{e^{ik_2 R}}{R} + \int_0^{\infty} f_2(\lambda) J(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} \lambda d\lambda. \end{cases}$$

Die primäre Erregung ist in der Form (6) angesetzt, und zwar beidemal mit der gleichen Amplitude, wie es der Grenzbedingung $\Pi_1 = \Pi_2$ für $r = 0$, $z = 0$ entspricht; die sekundäre Erregung haben wir in der Form (8) gewählt.

Jetzt lassen sich die Grenzbedingungen (5) durch Wahl von f_1 , f_2 befriedigen. Mit Rücksicht auf (9) schreiben wir die Bedingung $\Pi_1 = \Pi_2$ folgendermaßen:

$$(12a) \quad \begin{cases} \int_0^{\infty} \lambda d\lambda J(\lambda r) \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \right\} \\ = - \int_0^{\infty} \lambda d\lambda J(\lambda r) \{f_1(\lambda) - f_2(\lambda)\}. \end{cases}$$

Was die Grenzbedingung $\partial \Pi_1 / \mathbf{x}_1^2 \partial z = \partial \Pi_2 / \mathbf{x}_2^2 \partial z$ betrifft, so dürfen wir hier die primäre Erregung nicht durch die Formeln (9) darstellen, weil diese, unter dem Integralzeichen nach z differentiiert, für $z = 0$ divergieren würden. Aus Symmetriegründen oder durch Ausrechnung folgt aber direkt, daß

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikR}}{R} = 0 \quad \text{für } z = 0.$$

Deshalb fällt aus unserer zweiten Grenzbedingung die primäre Erregung heraus, und dieselbe lautet einfach:

$$(12b) \quad 0 = - \int_0^\infty \lambda d\lambda J(\lambda, r) \left\{ \frac{f_1(\lambda)}{\mathbf{x}_1^2} \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + \frac{f_2(\lambda)}{\mathbf{x}_2^2} \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} \right\}.$$

Die Gleichungen (12a) und (12b) sind befriedigt, wenn wir machen:

$$f_1(\lambda) - f_2(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}},$$

$$\frac{f_1(\lambda)}{\mathbf{x}_1^2} \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + \frac{f_2(\lambda)}{\mathbf{x}_2^2} \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} = 0,$$

d. h.

$$(13) \quad \begin{cases} f_1(\lambda) = \frac{\mathbf{x}_1^2}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\mathbf{x}_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + \mathbf{x}_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}, \\ f_2(\lambda) = \frac{\mathbf{x}_2^2}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}{\mathbf{x}_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + \mathbf{x}_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}. \end{cases}$$

Durch Eintragen dieser Werte in (11) ist unsere allgemeine Lösung völlig bestimmt. Man kann nur noch eine gemeinsame multiplikative Konstante zu Π_1 , Π_2 hinzufügen, durch die die Stärke der Erregung in der Quelle dargestellt wird.

Man überzeugt sich nachträglich leicht, daß auch unsere Stetigkeits- und Endlichkeitsbedingungen erfüllt sind. In der Tat bleibt unsere sekundäre Erregung (die Differenz von Π und der primären Erregung) auch für $z = 0$, $r = 0$ endlich, da dieselbe z. B. im Medium 1 gegeben ist durch

$$\left(\Pi_1 - \frac{e^{ik_1 R}}{R} \right)_{R=0} = \int_0^\infty \frac{\mathbf{x}_1^2 \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\mathbf{x}_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + \mathbf{x}_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}},$$

d. h. durch ein unbedingt konvergentes Integral (der Integrand verschwindet für $\lambda = \infty$ wie $1/\lambda^2$). Ähnliches gilt für den

Gradienten der sekundären Erregung im Punkte $R = 0$, d. h. für den nach einer beliebigen Richtung des Mediums 1 genommenen Differentialquotienten, in dem wir allerdings nicht mehr wie soeben unter dem Integralzeichen $r = z = 0$ setzen dürfen, ohne die Konvergenz des Integrals zu zerstören.

Sei ϑ der Winkel zwischen jener Richtung und der z -Achse, so wird für einen beliebigen Punkt (r, z) , den wir nachträglich in der gleichen Richtung ϑ nach $(0, 0)$ wandern lassen

$$\text{grad}_\vartheta = \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r},$$

also mit der Abkürzung $\varphi(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} f_1(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \text{grad} \left(\Pi_1 - \frac{e^{ik_1 R}}{R} \right) &= -\cos \vartheta \int_0^\infty \lambda d\lambda \varphi(\lambda) J(\lambda r) e^{-V\lambda^2-k_1^2 z} \\ &\quad + \sin \vartheta \int_0^\infty \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \varphi(\lambda) J'(\lambda r) e^{-V\lambda^2-k_1^2 z}. \end{aligned}$$

Das erste Integral geht mit der Substitution $\lambda r = u$ wegen $z/r = \operatorname{ctg} \vartheta$ über in:

$$\frac{1}{r^2} \int_0^\infty u du \psi(u) J(u) e^{-Vu^2-k_1^2 r^2} \operatorname{ctg} \vartheta,$$

$$\text{wenn } \psi(u) = \varphi\left(\frac{u}{r}\right) = x_1^2 \frac{\sqrt{u^2 - k_1^2 r^2} - \sqrt{u^2 - k_2^2 r^2}}{x_1^2 \sqrt{u^2 - k_2^2 r^2} + x_2^2 \sqrt{u^2 - k_1^2 r^2}}.$$

Lassen wir r zu Null abnehmen, so bleibt das Integral nach u konvergent, weil der Exponent von e den auch für $r = 0$ und alle Werte von $\vartheta < \pi/2$ negativen Wert $-u \operatorname{ctg} \vartheta$ hat. Dagegen wird der Faktor $1/r^2$ vor dem Integral ∞ . Wir zeigen indessen, daß er sich forthebt. Zu dem Zwecke teilen wir die Integration in zwei Teile, von 0 bis ε , und von ε bis ∞ , wo $\varepsilon = kr$ und k größer als $|k_2|$ und $|k_1|$ sei. In dem Integral von ε bis ∞ können wir $\psi(u)$ entwickeln:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= x_1^2 \frac{u \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_1 r}{u} \right)^2 + \dots \right) - u \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_2 r}{u} \right)^2 + \dots \right)}{(x_1^2 + x_2^2) u + \dots} \\ &= -\frac{x_1^2}{2} \frac{k_1^2 - k_2^2 r^2}{x_1^2 + x_2^2 u^2}. \end{aligned}$$

Dieser Teil bleibt also mit r^2 dividiert endlich für $r = 0$. In dem anderen Teile von 0 bis ε können wir das Produkt von ψ , J und der Exponentialfunktion durch seinen maximalen absoluten Wert M ersetzen. Dieser Teil wird also nach Division mit r^2 kleiner als

$$\frac{M}{r^3} \int_0^\varepsilon u \, du = \frac{M k^3}{2},$$

und bleibt daher ebenfalls endlich. Dieselbe Überlegung überträgt sich auf den anderen Teil des Gradienten im Medium 1 sowie auf das Medium 2. Es bleibt also auch der Gradient der Differenz zwischen Π_1 , Π_2 und unserer primären Erregung im Punkte $R = 0$ und somit überall endlich.

Während sich für die Untersuchung der Stelle $R = 0$ die Darstellung (11) als sehr geeignet erweist, wird bei der Beobachtung großer Entfernung eine andere Form der Lösung geeigneter, in der die primäre und sekundäre Erregung nicht mehr getrennt erscheinen. Wir stellen also die primäre Erregung durch das Integral (9) dar und ziehen sie in (11) unter dem Integralzeichen nach λ mit der sekundären zusammen. Eine leichte Rechnung liefert so die mit (11) völlig identische Form:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_1 = \int_0^{\infty} \frac{x_1^2 + x_2^2}{N} J(\lambda r) e^{-V\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \cdot \lambda \, d\lambda, \\ \Pi_2 = \int_0^{\infty} \frac{x_1^2 + x_2^2}{N} J(\lambda r) e^{+V\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \cdot \lambda \, d\lambda \end{array} \right.$$

mit der Abkürzung

$$(15) \quad N = x_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + x_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}.$$

Zwei Spezialfälle mögen sogleich erwähnt werden:

1. $k_1 = k_2 = k$, einheitliches homogenes Medium. In diesem Falle wird

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{N} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}$$

und nach (14) und (9):

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \frac{e^{ikR}}{R},$$

während (11) und (13) noch direkter zeigen, daß die sekundäre Erregung verschwindet.

2. $k_2 = \infty$, unendlich hohe Leitfähigkeit oder unendlich große Dielektrizitätshkonstante im Medium 2. Wiederum wird einfach:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{N} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}$$

und nach (14) und (9)

$$(16) \quad \Pi_1 = \frac{e^{i k_1 R}}{R},$$

d. h. gleich der speziellen Funktion des Hertzischen Dipols, die Abraham (vgl. Einleitung) der Diskussion dieses Grenzfalles zugrunde legt. Der Ausdruck von Π_2 wird gleichzeitig

$$\Pi_2 = \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} J(\lambda r) e^{+V\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} = 0.$$

Unsere Lösung erscheint hiernach als direkte Verallgemeinerung bekannter Sonderfälle.

§ 4. Vorbereitung zur Diskussion der Lösung.

Schwieriger als die Aufstellung der allgemeinen Formeln erweist sich hier wie so häufig ihre spezielle Diskussion.

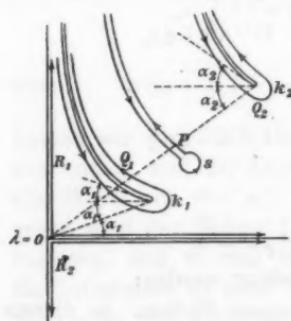


Fig. 2.

Berechnung der Ausdrücke (14) dienen können, liegen im Komplexen. Es gibt deren drei:

die Stellen $\lambda = k_1$ und $\lambda = k_2$,

Da wir k_2 als komplex vorzussetzen müssen und da wir der Allgemeinheit und Einfachheit wegen das Gleiche von k_1 annahmen, so wird es nötig, den reellen Integrationsweg ($0 < \lambda < \infty$) in die komplexe λ -Ebene überzuführen. Auf der reellen Achse verhält sich der Integrand in den Gleichungen (14) durchweg regulär und uncharakteristisch. Die charakteristischen Stellen desselben, die allein zu einer naturgemäßen

w
si
in
du
H
P
po
z
pl
w
ha
im
U
im
in
U
Au
mu
ge
be
Ve
dr
da
zu
an
na
17

welche Verzweigungspunkte der zu integrierenden Funktion sind, und

eine Stelle $\lambda = s$,

in der der Nenner N verschwindet.

Die Verzweigungspunkte $\lambda = k_1$ und $\lambda = k_2$ verbinden wir durch geeignete Verzweigungsschnitte mit dem Unendlichen. Hierbei wird unsere Festsetzung vom Anfange des vorigen Paragraphen maßgebend, wonach der reelle Teil von

$$\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$$

positiv sein soll. Damit unsere Integrale für jeden Wert von $z > 0$ bzw. $z < 0$ einen Sinn haben, ist dieselbe auf die komplexe Ebene auszudehnen. Als Grenze, die vom Integrationsweg nicht überschritten werden darf („Verzweigungsschnitt“), hat daher diejenige Linie zu gelten, in der $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ rein imaginär wird. Diese Linie verläuft asymptotisch nach dem Unendlichen der imaginären Achse, wo ja $\sqrt{\lambda^2 - k^2} = \lambda$ rein imaginär ist, und beginnt bei $\lambda = k$ unter einem Winkel, der in Fig. 2 konstruiert ist. Setzen wir vorübergehend für die Umgebung von $\lambda = k$:

$$\lambda - k = \zeta = |\zeta| e^{i\psi}, \quad k = |k| e^{ia},$$

so wird

$$\sqrt{\lambda^2 - k^2} = \sqrt{2k\zeta} = \sqrt{2|k||\zeta|} e^{\frac{i(\psi+a)}{2}}.$$

Auf dem Verzweigungsschnitt in der Nachbarschaft von $\lambda = k$ muß also $(\psi + a)/2 = \pi/2$, $\psi = \pi - a$ sein, wie in Fig. 2 angedeutet. Die Verzweigungsschnitte sind, entsprechend ihren beiden „Ufern“, als Doppellinien eingetragen. Die weiteren Verzweigungspunkte $\lambda = -k_1$, $\lambda = -k_2$, die im dritten Quadranten der λ -Ebene liegen, werden für uns keine Rolle spielen, da wir nur im ersten und vierten Quadranten operieren.

Was die Verschwindungsstelle $\lambda = s$ von N betrifft, so ist zunächst zu untersuchen, ob sie in dem durch die Verzweigungsschnitte begrenzten Teile der λ -Ebene oder in den anderen „Blättern“ derselben liegt. Zunächst folgt aus $N = 0$ nach (15):

$$(17) \quad s = \sqrt{\frac{k_2^2 x_1^4 - k_1^2 x_2^4}{x_1^4 - x_2^4}}$$

oder, wenn wir spezieller $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $x_1^2 = k_1^2/\mu$, $x_2^2 = k_2^2/\mu$ voraussetzen:

$$(17a) \quad s = \sqrt{\frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}}.$$

Die Frage ist, ob dieser Wert von s bei der durch unsere Festsetzung bedingten Wahl der Wurzelzeichen der Gleichung

$$(18a) \quad \sqrt{\frac{s^2 - k_2^2}{s^2 - k_1^2}} = - \frac{x_2^2}{x_1^2}$$

oder aber der Gleichung

$$(18b) \quad \sqrt{\frac{s^2 - k_2^2}{s^2 - k_1^2}} = + \frac{x_2^2}{x_1^2}$$

genügt. Im ersten Falle verschwindet N in dem für uns zugänglichen Teil der λ -Ebene, im zweiten Fall in den unzugänglichen Blättern. Dabei wird es erlaubt und bequem sein, von dem etwas spezielleren Werte (17a) auszugehen; das Resultat überträgt sich unmittelbar auf den allgemeineren Fall (17).

Aus (17a) folgt

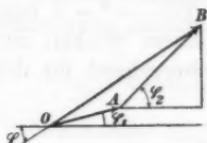


Fig. 3.

$$(17c) \quad \begin{cases} \sqrt{s^2 - k_1^2} = \sqrt{\frac{-k_1^4}{k_1^2 + k_2^2}}, \\ \sqrt{s^2 - k_2^2} = \sqrt{\frac{-k_2^4}{k_1^2 + k_2^2}}. \end{cases}$$

Im Anschluß an Fig. 3, in der die komplexe Zahl k_1^2 als Vektor OA und k_2^2 als Vektor AB , also $k_1^2 + k_2^2$ als Vektor OB aufgetragen ist, sei φ_1 , φ_2 , φ der Winkel, der zu k_1^2 , k_2^2 , $k_1^2 + k_2^2$ gehört. Dann wird nach (17c):

$$(19a) \quad \sqrt{s^2 - k_1^2} = \pm \sqrt{\frac{|k_1^4|}{|k_1^2 + k_2^2|}} e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1 - \frac{\varphi}{2}\right)},$$

$$(19b) \quad \sqrt{s^2 - k_2^2} = \pm \sqrt{\frac{|k_2^4|}{|k_1^2 + k_2^2|}} e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2 - \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Ist, wie wir annehmen dürfen, $\varphi_1 < \varphi_2$, so wird (vgl. Fig. 3) $\varphi < \varphi_2$ und um so mehr $\varphi_2 - \varphi/2 > 0$, also

$$\frac{\pi}{2} + \varphi_2 - \frac{\varphi}{2} > \frac{\pi}{2}.$$

Damit der reelle Teil positiv ausfällt, muß zunächst in (19b) das *untere* Vorzeichen — gewählt werden. Was (19a) betrifft,

so folgt aus $\varphi_1 < \varphi_2$ (vgl. Fig. 3) ebenso $\varphi > \varphi_1$; wir machen aber die weitergehende Annahme

$$(20) \quad \varphi > 2\varphi_1;$$

dann ist jedenfalls

$$0 < \frac{\pi}{2} + \varphi_1 - \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2};$$

damit also der reelle Teil von (19a) positiv ausfällt, haben wir hier das *obere* Vorzeichen + zu wählen. Durch Division von (19b) und (19a) erweist sich also bei dieser Vorzeichenwahl die Gleichung (18a) als erfüllt; *der Punkt $\lambda = s$ liegt im zugänglichen Gebiet.* Die hierzu erforderliche Bedingung (20) ist bei den Verhältnissen Luft-Erde stets erfüllt. Hier ist wegen der überwiegenden Leitfähigkeit des Erdreichs sicher $\varphi_2 > \varphi_1$, und daher auch (vgl. Fig. 3) $\varphi > \varphi_1$. Wie wir sehen werden, treten, wenn s im zugänglichen Gebiet liegt, *elektrodynamische Oberflächenwellen* auf. *Die Bedingung für ihre Möglichkeit ist also ebenfalls durch (20) gegeben.* Um diese Bedingung durch die Materialkonstanten und Schwingungszahl auszudrücken, folgern wir aus (20)

$$\operatorname{tg} \varphi > \operatorname{tg} 2\varphi_1$$

und hieraus zusammen mit der Gleichung (1) bei reellem n :

$$(20a) \quad \frac{\mu_1 \sigma_1 + \mu_2 \sigma_2}{\mu_1 \epsilon_1 + \mu_2 \epsilon_2} > \frac{2 \epsilon_1 \sigma_1 n^3}{\epsilon_1^2 n^2 - \sigma_1^2}.$$

Im Falle eines vollkommenen Nichtleiters $\sigma_1 = 0$ ist (20a) natürlich stets erfüllt, wenn nicht gleichzeitig $\sigma_2 = 0$. Ist auch $\sigma_2 = 0$, so rückt unser Pol auf den Verzweigungsschnitt, tritt also ins unzugängliche Gebiet über. Im unzugänglichen Gebiet liegt er z. B., wenn $\sigma_1 = \sigma_2$, $\mu_1 = \mu_2$, $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ist.

In Fig. 2 tragen wir nun entsprechend der Annahme, daß (20) erfüllt ist, den Punkt $\lambda = s$, der einen Pol des Integranden bedeutet, im zugänglichen Gebiete ein. Er rückt (vgl. (17)) um so näher an den Verzweigungspunkt k_1 heran, je größer x_2 gegen x_1 ist.

Wie bereits bemerkt, beabsichtigen wir den Integrationsweg von der reellen Achse ins Komplexe überzuführen. Hierbei würde die Funktion J störend sein, da sie sowohl für positiv-imaginäre wie für negativ-imaginäre unendlich große Werte des Argumentes unendlich anwächst. Wir spalten

daher J in die beiden sogenannten Hankelschen Funktionen¹⁾ H_1 , H_2 :

$$(21) \quad J(\lambda r) = \frac{1}{2} (H_1(\lambda r) + H_2(\lambda r)),$$

die für die meisten physikalischen Anwendungen die wichtigsten Lösungen der Besselschen Differentialgleichung sind. H_1 bzw. H_2 stellen nach dem Unendlichen divergierende oder aus dem Unendlichen konvergierende *fortschreitende* Zylinderwellen, J dagegen *stehende* Zylinderwellen dar. Für große Werte des Arguments rechts von der imaginären Achse gelten die bekannten asymptotischen Formeln:²⁾

$$(22) \quad \begin{cases} H_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{x^2}{4})}, \\ H_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{x^2}{4})}. \end{cases}$$

$H_1(x)$ verschwindet also im Unendlichen des ersten Quadranten der komplexen Ebene, $H_2(x)$ im Unendlichen des vierten Quadranten.

Schreiben wir jetzt statt (14) wegen (21):

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \int_0^\infty \frac{x_1^2 + x_2^2}{2N} H_1(\lambda r) e^{-V_{\lambda^2 - k_1^2} z} \lambda d\lambda, \\ &+ \int_0^\infty \frac{x_1^2 + x_2^2}{2N} H_2(\lambda r) e^{-V_{\lambda^2 - k_1^2} z} \lambda d\lambda, \end{aligned}$$

so werden wir den Integrationsweg im ersten Integral nach dem ersten, im zweiten nach dem vierten Quadranten hin verlegen. Im ersten Quadranten darf aber der Integrationsweg nicht über die Verzweigungsschnitte und den Pol $\lambda = s$ hinübergezogen werden. Im vierten Quadranten fehlen solche Hinder-

1) Bezeichnung von Nielsen l. c. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 18. p. 495. 1905 und Seitz, Ann. d. Phys. 21. p. 1013. 1906 bezeichnen sie mit Q . In meiner Arbeit über Drahtwellen (Wied. Ann. 67. p. 237. 1899) kommt H_1 im Anschluß an Heines $K(\Theta + 0i)$ als Besselsche Funktion K vor.

2) Nielsen, l. c. § 58.

nisse. Daher läßt sich das zweite Integral direkt überführen in ein Integral längs der negativen imaginären Achse

$$R_2 = \int_0^{-i\infty} \frac{x_1^2 + x_2^2}{2N} H_2(\lambda r) e^{-V\lambda^2 - k_1^2 z} \lambda d\lambda.$$

Das erste Integral zerlegt sich in vier Bestandteile, die wir mit

$$P, \quad Q_1, \quad Q_2, \quad R_1$$

bezeichnen: P sei der Umgang um den Pol $\lambda = s$, im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers erstreckt, wie aus Fig. 2 ersichtlich. Q_1, Q_2 sind die an den Verzweigungsschnitten hängen gebliebenen, an deren beiderseitigen Ufern entlang zu führenden Teile des Integrals. Endlich ist R_1 das Integral längs der positiven imaginären Achse

$$R_1 = \int_0^{+i\infty} \frac{x_1^2 + x_2^2}{2N} H_1(\lambda r) e^{-V\lambda^2 - k_1^2 z} \lambda d\lambda.$$

Außer diesen vier Bestandteilen würden bei der kontinuierlichen Deformation des reellen Integrationsweges noch die beiden Zuführungswege aus dem Unendlichen nach unserem Pol und gewisse unendlich ferne Wegstücke auftreten. Die ersten heben sich aber bekanntlich gegenseitig auf, die letzteren geben keinen Beitrag, weil eben $H_1(H_2)$ im Unendlichen des ersten (vierten) Quadranten verschwindet. Schließlich aber heben sich auch noch R_1 und R_2 gegeneinander auf infolge der Beziehung¹⁾

$$H_2(x e^{-i\pi}) = -H_1(x).$$

Setzen wir hierin $x = \lambda r$, multiplizieren beiderseits mit

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2N} e^{-V\lambda^2 - k_1^2 z} \lambda d\lambda$$

und integrieren auf der positiv imaginären λ -Achse von $\lambda = 0$ bis $\lambda = +i\infty$, so entsteht rechts $-R_1$; machen wir dann noch links die Substitution $\lambda e^{-i\pi} = \lambda'$, so durchläuft die nun-

1) Nielsen, l. c. § 5 Gleichung (7).

mehrige Integration in λ' die negativ imaginäre Achse und es entsteht links $+R_2$. Somit gilt in der Tat:

$$R_1 + R_2 = 0.$$

Wir haben also schließlich nur drei charakteristische Bestandteile, aus denen sich Π_1 und ganz analog Π_2 zusammensetzt:

$$(23) \quad \begin{cases} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{cases} = P + Q_1 + Q_2.$$

Mit Rücksicht auf § 8 sei hier noch folgende Bemerkung eingeschaltet. Gehen wir nicht von dem Ausdrucke (14) für Π_1 , sondern von der Integraldarstellung (9) für die einfache primäre Erregung $e^{ik_1 R}/R$ aus und wenden auf diese dasselbe Verfahren an, so haben wir als einzigen Verzweigungsschnitt den zu $\lambda = k_1$ gehörigen zu berücksichtigen. Der Nenner $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$ im Ausdruck (9) verschwindet an keiner anderen Stelle als im Verzweigungspunkte selbst. Auch die beiden über die positive bzw. negative imaginäre Achse mit H_1 bzw. H_2 gebildeten Integrale (entsprechend den vorstehenden Termen R_1 , R_2) heben sich gegenseitig auf und es bleibt allein das dem vorstehenden Terme Q_1 entsprechende Integral übrig. Wir haben daher

$$(23a) \quad \frac{e^{ik_1 R}}{R} = \frac{1}{2} \int \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} H_1(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z},$$

das Integral als Schleife, um den zu $\lambda = k_1$ gehörigen Verzweigungsschnitt geführt.

§ 5. Die Oberflächenwellen P .

Am interessantesten und zugleich am leichtesten auszuwerten ist der Bestandteil P . Wir haben, wenn das Integral einen Umgang um den Pol $\lambda = s$ bedeutet,

$$(24) \quad P = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \int \frac{\lambda d\lambda}{N} H_1(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z},$$

also nach der Residuenregel:

$$P = 2\pi i \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} s H_1(s r) e^{-\sqrt{s^2 - k_1^2} z} \lim_{\lambda \rightarrow s} \left(\frac{\lambda - s}{N} \right).$$

Der letzte Faktor ist nichts anderes als das Residuum von $1/N$ und gleich $1/(dN/d\lambda)$. Nun folgt aus (15) für $\lambda = s$:

$$\frac{dN}{d\lambda} = \frac{x_1^2 s}{\sqrt{s^2 - k_2^2}} + \frac{x_2^2 s}{\sqrt{s^2 - k_1^2}}$$

und aus (17):

$$(25) \quad \sqrt{s^2 - k_2^2} = \sqrt{\frac{(k_2^2 - k_1^2)x_2^4}{x_1^4 - x_2^4}}, \quad \sqrt{s^2 - k_1^2} = \sqrt{\frac{(k_2^2 - k_1^2)x_1^4}{x_1^4 - x_2^4}},$$

also mit Rücksicht auf die Vorzeichenbestimmung in den Gleichungen (18) und (19):

$$\frac{dN}{d\lambda} = \left(\frac{x_1^2}{x_2^2} - \frac{x_2^2}{x_1^2} \right) s \sqrt{\frac{x_1^4 - x_2^4}{k_2^2 - k_1^2}},$$

$$(26a) \quad P = \pi C H_1(s r) e^{-\sqrt{s^2 - k_2^2} z}, \quad C = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 - x_2^2} \sqrt{\frac{k_2^2 - k_1^2}{x_2^4 - x_1^4}}.$$

Der entsprechende Wert für das Medium 2 entsteht hieraus, wie der Vergleich der beiden Formeln (14) zeigt, wenn wir in der Exponentialfunktion k_1 mit k_2 und $+$ mit $-$ vertauschen, nämlich

$$(26b) \quad P = \pi C H_1(s r) e^{+\sqrt{s^2 - k_2^2} z}.$$

Die Ausdrücke (26) kennzeichnen sich von selbst als *Oberflächenwellen*: Die Fortpflanzung (Phasengeschwindigkeit in radialer Richtung und radiale Dämpfung) bestimmt sich durch den Wert von s , also durch die Materialkonstanten *beider* Medien; die Welle ist mehr oder minder *konzentriert* auf die Umgebung der Oberfläche, indem ihre Intensität normal zur Oberfläche abnimmt und zwar bei großem k_2 infolge der Gleichung (25) langsam nach oben, schnell nach unten hin; die Amplitude nimmt, von der radialen Dämpfung abgesehen, mit wachsendem r nur sehr langsam, nämlich (vgl. (22)) wie $1/\sqrt{r}$ ab.

Auf letzteren Umstand haben wir besonderes Gewicht zu legen; er ist ebenso sehr maßgebend für die Praxis der Übertragung von Signalen, wie kennzeichnend für die Natur der Oberflächenwellen (vgl. Einleitung unter Nr. 5).

Ihrer Ableitung nach sind die Formeln (26) streng gütig für jedes r ; trotzdem werden sie für kleines r ungeeignet, da sie für $r = 0, z \neq 0$ ein Unendlichwerden liefern, das nicht in der Natur der Sache liegt. Dieses kommt nur durch die

Zerlegung des Gesamtorganges nach (23) zustande und muß durch ein entgegengesetztes Unendlichwerden der Bestandteile Q aufgehoben werden. Wir werden uns deshalb im folgenden auf den Fall: r groß oder, besser gesagt, $r k_1$ eine große Zahl beschränken. ($r k_1$ bedeutet das 2π -fache der Anzahl Wellenlängen, um die der Aufpunkt von der Vertikalen durch die Quelle entfernt ist.) Es kommt hinzu, daß wegen der weitgehenden Schematisierung des Erregungsvorganges in unserem Ansatz die Formeln überhaupt nur in großer Entfernung von der Quelle die Verhältnisse richtig wiedergeben beanspruchen können, während im Bereich einiger Wellenlängen die besondere Anordnung des Sendersystems von erheblichem Einfluß sein kann.

Bei großem r folgt aus (26) wegen (22)

$$(26c) \quad \begin{cases} P = C e^{-\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi s}{sr}} e^{isr - V_{s^2-k_1^2}z} \dots z > 0, \\ \text{bzw.} \\ P = C e^{-\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi s}{sr}} e^{isr + V_{s^2-k_1^2}z} \dots z < 0. \end{cases}$$

Wir bilden die zugehörigen Feldstärken nach (2a), (3) und (3a), wobei wir konsequenterweise nur die niedrigsten Potenzen von r beizubehalten haben. Es ergibt sich, zusammenfassend für $z \geq 0$ geschrieben:

$$\mathfrak{H} = C e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi s}{r}} e^{isr \mp V_{s^2-k^2}z},$$

$$\mathfrak{E}_r = \mp \frac{i n}{e \times^4} C e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{s^2 - k^2} \sqrt{\frac{2\pi s}{r}} e^{isr \mp V_{s^2-k^2}z},$$

$$\mathfrak{E}_z = - \frac{n}{e \times^4} C e^{\frac{i\pi}{4}} s \sqrt{\frac{2\pi s}{r}} e^{isr \mp V_{s^2-k^2}z}.$$

Schließlich mögen wir noch in dem großen Abstande r von der Quelle ein rechtwinkeliges Koordinatensystem einführen: die x -Achse in der Richtung der wachsenden r , die z -Achse parallel der früheren z -Achse, wobei die Richtung von \mathfrak{H} in die y -Achse fällt. Dann wird mit der Abkürzung

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H}_y = a e^{i s z \mp \sqrt{s^2 - k^2} z}, \\ \mathfrak{E}_x = \mp \frac{i n}{c x^2} a \sqrt{s^2 - k^2} e^{i s z \mp \sqrt{s^2 - k^2} z}, \\ \mathfrak{E}_z = - \frac{n}{c x^2} a s e^{i s z \mp \sqrt{s^2 - k^2} z}. \end{array} \right.$$

Dies sind genau diejenigen Formeln, welche Uller und Zenneck (vgl. Einleitung) der Behandlung der drahtlosen Telegraphie zugrunde gelegt haben. Wegen der numerischen Diskussion dieser Formeln kann auf die Arbeit von Zenneck verwiesen werden. Zur allgemeinen Orientierung sei nur hinzugefügt, daß die elektrischen Kraftlinien in Luft im Sinne der Fortpflanzungsrichtung voran-eilen (vgl. die schematische Fig. 4), in Erde nachschleppen, und daß der Winkel, den die Kraftlinien in Luft mit der Normalen zur Erdoberfläche bilden, um so größer wird, je schlechter ihre Leitfähigkeit ist (bei Seewasser unmerklich klein, bei trockenem Erdboden etwa 30°).

Schließlich haben wir noch auf einen Punkt hinzuweisen: die Abhängigkeit unseres Faktors C (Gleichung (26a)) von der Materialkonstante k_2 . Mit wachsendem k_2 (also z. B. mit zunehmender Leitfähigkeit des Bodens) nähert sich C dem Werte

$$(28) \quad C = - \frac{x_1^2 k_2}{x_2^2} = 0.$$

Unsere Oberflächenwellen, so scheint es, treten also bei guter Leitfähigkeit an Bedeutung mehr und mehr zurück. Auf die Berichtigung dieser Folgerung kommen wir in § 8 ausführlich zurück.

§ 6. Die Raumwellen Q .

Der Bestandteil Q_1 der Hertzschen Funktion im ersten Medium ist bestimmt durch:

$$(29) \quad Q_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \int \frac{\lambda d\lambda}{N} H_1(\lambda r) e^{-V_{\lambda^2 - k_1^2} z},$$

wenn das Integral im Sinne der Fig. 2 über die beiden Ufer des Verzweigungsschnittes ($i\infty, k_1$) genommen wird. Auf

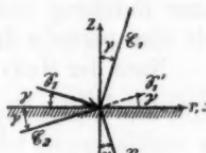


Fig. 4.

diesem ist $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} = i\tau$, d. h. rein imaginär, und zwar $+i\tau$ auf dem einen, $-i\tau$ auf dem anderen Ufer. Indem wir τ alle reellen Werte von $-\infty$ bis 0 und von 0 bis $+\infty$ beilegen, durchlaufen wir das eine und sodann, wie es sein soll, im entgegengesetzten Sinne das andere Ufer. Für Q_1 können wir schreiben

$$(30) \quad Q_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \int_{\tau = -\infty}^{\tau = +\infty} \lambda d\lambda H_1(\lambda r) \frac{e^{-i\tau z}}{x_2^2 i\tau + x_1^2 \sqrt{-\tau^2 + k_1^2 - k_2^2}},$$

wobei noch wegen $\lambda^2 - k_1^2 = -\tau^2$ ersetzt werden kann $\lambda d\lambda$ durch $-\tau d\tau$. Man erkennt hieraus, daß es sich um die Integration einer durchweg stetigen Funktion handelt. Deshalb können wir eine partielle Integration ausführen.

Nach der Besselschen Differentialgleichung, deren Lösung $H(x)$ ist, gilt:

$$\frac{d}{dx} x \frac{dH}{dx} = -xH,$$

also unbestimmt ausgeführt

$$\int x H(x) dx = -x \frac{dH(x)}{dx}$$

und

$$\int H(\lambda r) \lambda d\lambda = -\frac{1}{r} \lambda H'(\lambda r).$$

Da H' , der nach dem Argument genommene Differentialquotient, für die Grenzen $\tau = \pm i\infty$, d. h. $\lambda = i\infty$ verschwindet, so fällt bei der partiellen Integration das vom Integralzeichen freie Glied fort und es folgt aus (30):

$$Q_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2r} \int_{\tau = -\infty}^{\tau = +\infty} \lambda d\lambda H'_1(\lambda r) \frac{d}{d\tau} \frac{e^{-i\tau z}}{x_2^2 i\tau + x_1^2 \sqrt{-\tau^2 + k_1^2 - k_2^2}} \frac{d\tau}{d\lambda}.$$

Hier setzen wir für $d\tau/d\lambda$ den aus $\lambda d\lambda = -\tau d\tau$ folgenden Wert $-\lambda/\tau$ und für H'_1 , indem wir wie auf p. 696 zu großen Werten von r übergehen, den aus (22) folgenden asymptotischen Ausdruck

$$H'(\lambda r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} e^{\frac{i\pi}{4}} e^{i\lambda r}$$

ein; z soll dabei eine mäßige Größe und jedenfalls klein gegen r sein. Dann wird:

$$(31) \quad Q_1 = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{r \sqrt{2\pi r}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \int_{r=-\infty}^{r=+\infty} \frac{\lambda \sqrt{\lambda} d\lambda}{\tau} e^{i\lambda r} \frac{d}{d\tau} \frac{e^{-i\tau z}}{x_2^2 i\tau + x_1^2 \sqrt{-\tau^2 + k_1^2 - k_2^2}}.$$

Jetzt wird der Integrand für $\tau = 0$ unendlich wie $1/\tau$, d. i. in der Variablen λ für $\lambda = k_1$ wie $i/\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$.

Nun besteht der allgemeine Satz¹⁾, daß

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{i\infty} e^{itr} f(t) \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{f(0)}{\sqrt{r}} \int_0^{i\infty} e^{ix} \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ = f(0) \sqrt{\frac{\pi}{r}} e^{-\frac{i\pi}{4}}, \end{array} \right.$$

falls $f(t)$ auf dem ganzen Integrationswege endlich und stetig ist und falls man sich, wie es durch das Limeszeichen angedeutet wird, auf die niedrigste Potenz in r beschränkt. In diesem Falle trägt nämlich nur die Stelle $t=0$ merklich zum Werte des Integrales bei, so daß man $f(t)$ durch $f(0)$ ersetzen kann. Führt man dann $x=tr$ als neue Integrationsvariable ein, so tritt der Faktor $1/\sqrt{r}$ vor das Integralzeichen. Das Integral nach x läßt sich, wie in (32) angegeben, direkt ausführen. Um diesen Satz auf (31) anzuwenden, setzen wir:

$$\begin{aligned} t &= \lambda - k_1, \quad e^{i\lambda r} = e^{ik_1 r} e^{itr}, \\ f(t) &= \frac{i\lambda \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda+k_1}} \frac{d}{d\tau} \frac{e^{-i\tau z}}{x_2^2 i\tau + x_1^2 \sqrt{-\tau^2 + k_1^2 - k_2^2}}, \\ f(0) &= \frac{ik_1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{e^{-i\tau z}}{x_2^2 i\tau + x_1^2 \sqrt{-\tau^2 + k_1^2 - k_2^2}} \right)_{\tau=0} \\ &= \frac{k_1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x_2^2}{x_1^4 (k_1^2 - k_2^2)} + \frac{z}{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \right); \end{aligned}$$

auf dem einen Ufer des Verzweigungsschnittes läuft t von 0 bis $i\infty$, auf dem anderen Ufer von ∞i bis 0; letzteres liefert wegen des umgekehrten Vorzeichens von \sqrt{t} denselben Wert wie ersteres.

1) Vgl. z. B. E. Heine, Handb. d. Kugelfunktionen 1. p. 62, 4. Satz.

Daraufhin ergibt sich aus (32):

$$(33 \text{ a}) \quad \begin{cases} Q_1 = \frac{C_1}{r^2} e^{ik_1 r}, \\ C_1 = -ik_1 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \left(\frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^4 (k_1^2 - k_2^2)} + \frac{x}{\kappa_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \right). \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, welche Abänderungen hierin vorzunehmen sind, wenn wir von dem Bestandteile Q_1 im ersten Medium zu demjenigen im zweiten Medium übergehen wollen. Wir haben in (29) zu ersetzen:

$$-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z \text{ durch } +\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z,$$

also in (30):

$$-i\tau z \text{ durch } \sqrt{-\tau^2 + k_1^2 - k_2^2} z,$$

ebenso in (31). Die Definition von $f(t)$ wird daher jetzt:

$$f(t) = \frac{i\lambda\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} + k_1} \frac{d}{dt} \frac{e^{\sqrt{-\tau^2 + k_1^2 - k_2^2} z}}{\kappa_2^2 i\tau + \kappa_1^2 \sqrt{-\tau^2 + k_1^2 - k_2^2}},$$

$$f'(o) = \frac{k_1}{\sqrt{2}} \frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^4 (k_1^2 - k_2^2)} e^{\sqrt{k_1^2 - k_2^2} z}.$$

Daher wird für das Medium 2:

$$(33 \text{ b}) \quad \begin{cases} Q_1' = \frac{C_1'}{r^2} e^{ik_2 r} + \sqrt{k_1^2 - k_2^2} z, \\ C_1' = -ik_2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^4 (k_2^2 - k_1^2)}. \end{cases}$$

Die Werte des anderen Bestandteiles Q_2 im ersten und zweiten Medium lassen sich leicht aus den vorstehenden abnehmen. Ersetzen wir k_1 durch k_2 und $+z$ durch $-z$, so geht das Integral über den Verzweigungsschnitt ($i\infty, k_1$) in dasjenige über den Verzweigungsschnitt ($i\infty, k_2$) und daher auch der Wert von Q_1 im ersten in denjenigen von Q_2 im zweiten Medium, und umgekehrt über. Wir erhalten daher durch die genannte Vertauschung aus (33 b) als Wert von Q_2 in 1:

$$(34 \text{ a}) \quad \begin{cases} Q_2 = \frac{C_2}{r^2} e^{ik_1 r} - \sqrt{k_2^2 - k_1^2} z, \\ C_2 = -ik_1 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2^4 (k_2^2 - k_1^2)}, \end{cases}$$

und aus (33 a) als Wert von Q_2 in 2:

$$(34 \text{ b}) \quad \begin{cases} Q_2 = \frac{C_2'}{r^2} e^{ik_2 r}, \\ C_2' = -ik_2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \left(\frac{\kappa_1^2}{\kappa_2^4 (k_2^2 - k_1^2)} - \frac{x}{\kappa_2^2 \sqrt{k_2^2 - k_1^2}} \right). \end{cases}$$

Betrachten wir nun die Ausdrücke (33) und (34) unter den im vorigen Paragraphen aufgestellten Gesichtspunkten.

Wir erkennen in (33a) *gewisse dem Medium 1 charakteristische Raumwellen*. Die Fortpflanzung dieser Wellen (Phasengeschwindigkeit und eventuelle Dämpfung) hängt nämlich nur von der Materialkonstante k_1 ab. Im Medium 2 (33b) haben wir wegen der Wechselwirkung beider Medien an der Grenzfläche notwendig dieselbe radiale Fortpflanzung, gegeben durch den Faktor $e^{ik_1 r}$. Dazu kommt aber, wegen der im Medium 2 herrschenden Differentialgleichung, eine Fortpflanzung und Dämpfung in normaler Richtung, gegeben durch den Faktor

$$e^{\sqrt{k_1^2 - k_2^2} z}.$$

Ebenso erkennen wir in (34b) *gewisse dem Medium 2 charakteristische Raumwellen*, welche durch die Materialkonstante k_2 bedingt werden, und in (34a) diejenige Wellenform, wie sie, den Verhältnissen des Mediums 1 angepaßt, in diesem koexistieren kann.

Beide Arten Raumwellen nehmen mit wachsendem r sehr schnell ab, nämlich (von der radialen Dämpfung abgesehen) wie $1/r^2$. Sie werden daher in großer Entfernung von der Quelle gegen die Oberflächenwellen im allgemeinen zurücktreten. Allerdings müssen wir bei der Bezeichnung „Raumwellen“ hervorheben, daß es sich nicht um den gewöhnlichen Typus von Kugelwellen handelt. Weder der Faktor $1/r^2$ in (33) und (34) (über dessen Bedeutung man die Einleitung unter Nr. 5 vergleiche) noch das Vorkommen der Koordinate z in C_1 und C_2' entspricht dem gewöhnlichen Wellenvorgange im homogenen Medium; vielmehr handelt es sich hier um einen durch den Zusammenhang beider Medien und durch seine Koexistenz mit den Oberflächenwellen abgeänderten Typus.

Unsere Ausdrücke sind ihrer Ableitung nach Näherungsformeln und gelten natürlich nur in großem Abstand von der z -Achse, wie schon durch ihr scheinbares Unendlichwerden für $r = 0$ dargetan wird (vgl. hierzu eine Bemerkung von p. 695 über ein ähnliches Vorkommnis bei P). Unter Einführung des im vorigen Paragraphen genannten rechtwinkligen Koordinatensystems wollen wir auch hier die Feldstärken \mathfrak{H}_y , \mathfrak{E}_x , \mathfrak{E}_z bei derjenigen ebenen Welle angeben, in die z. B. unsere

Raumwelle Q_1 für einen hinreichend entfernten Beobachter übergeht. Nehmen wir die in (2a), (3a) und (3) vorgesehenen Differentiationen an den Ausdrücken (33a) und (33b) vor, unter Beschränkung auf die niedrigste Potenz von r , zählen den Faktor $1/r^2$ zur Amplitude hinzu und schreiben schließlich im Exponenten x statt r , so ergibt sich für das Medium 1:

$$(35 \text{ a}) \quad \begin{cases} \mathfrak{H}_y = (a + b z) e^{i k_1 x}, \\ \mathfrak{E}_x = \frac{i n}{c x_1^2} b e^{i k_1 x}, \\ \mathfrak{E}_z = \frac{n k_1}{c x_1^2} (a + b z) e^{i k_1 x}, \end{cases}$$

und für das Medium 2:

$$(35 \text{ b}) \quad \begin{cases} \mathfrak{H}_y = a e^{i k_1 x + \sqrt{k_1^2 - k_2^2} z}, \\ \mathfrak{E}_x = \frac{i n}{c x_1^2} b e^{i k_1 x + \sqrt{k_1^2 - k_2^2} z}, \\ \mathfrak{E}_z = \frac{n k_1}{c x_2^2} a e^{i k_1 x + \sqrt{k_1^2 - k_2^2} z}, \end{cases}$$

mit den Abkürzungen:

$$a = \frac{k_1^2}{r^2} \frac{x_2^2 (x_1^2 + x_2^2)}{x_1^4 (k_1^2 - k_2^2)}, \quad b = \frac{k_1^2}{r^2} \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}}.$$

Ersichtlich erfüllt das vorstehende System in Strenge die Maxwellschen Differentialgleichungen und Oberflächenbedingungen (\mathfrak{E}_z und \mathfrak{H}_y beiderseits gleich) und kann daher als ein neuer Typus ebener Wellen ein gewisses Interesse beanspruchen. Zur Veranschaulichung des Verlaufs der Kraftlinien in der Nähe der Trennungsfläche kann auch jetzt Fig. 4 dienen.

Schließlich betrachten wir auch hier die Abhängigkeit unserer Konstanten C , welche die Intensität der Raumwellen bestimmen, von der Materialkonstanten k_3 in der Grenze für unendlich wachsendes k_3 und x_3 . Es wird

$$C_1 = C_1' = -i \frac{k_1}{k_2^2} \frac{x_3^4}{x_1^4} = -i \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} \frac{k_2^2}{k_1^2} = \infty,$$

$$C_2 = C_2' = i \frac{x_1^2}{k_2 x_2^2} = i \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{k_1^2}{k_2^2} = 0.$$

Hiernach scheint es, als ob unsere Raumwellen Q_1 gegenüber den Oberflächenwellen P , deren Amplitude (vgl. den Schluß des vorigen Paragraphen) mit wachsendem k_3 abnimmt, an

Bedeutung zunehmen. Die folgenden beiden Paragraphen werden diese Folgerung zwar im großen und ganzen bestätigen, zugleich aber auch den Gültigkeitsbereich der bisherigen Formeln umgrenzen, derart, daß es zu einem Unendlichwerden der Amplitude der Raumwellen unter keinen Umständen kommen kann.

§ 7. Reihenentwickelung für die Raumwelle Q_1 bei großer numerischer Entfernung.

Wir wollen die im vorigen Paragraphen gegebene Darstellung von Q_1 durch eine Reihenentwickelung ergänzen, deren erstes Glied jene Darstellung ist. Als Kriterium für die Gültigkeit der früheren sowie der neuen Darstellung wird sich ergeben, daß eine aus den Materialeigenschaften und der Entfernung zusammengesetzte Zahl, die wir (vgl. Einleitung) die *numerische Entfernung* nennen, groß sein muß.

Unserer Entwicklung legen wir zunächst die Voraussetzungen zugrunde: 1. $k_1 r$ und um so mehr $k_1 R$ groß, d.h. r bzw. R ein großes Vielfaches der Wellenlänge. 2. $|k_2|$ groß gegen $|k_1|$, was bei allen Bodenarten mehr oder minder gut zutrifft. Aus dem vorigen Paragraphen entnehmen wir, daß dann die Raumwellen Q_2 neben Q_1 vernachlässigt werden können wegen des Faktors $e^{ik_2 r}$, der eine starke radiale Dämpfung mit sich bringt, da $k_2 r = (k_2/k_1)k_1 r$ erst recht eine große Zahl ist. Wir werden uns also nur mit Q_1 beschäftigen.

Nach Gleichung (29) haben wir

$$Q_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \int H_1(\lambda r) e^{-V\lambda^2 - k_1^2 z} \frac{\lambda d\lambda}{N},$$

wenn das Integral auf einer Schleife um den Verzweigungspunkt $k_1 \infty$ erstreckt wird, die den Pol $\lambda = s$ ausschließt. Nach Gleichung (15) ist

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{x_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x_2^2}{x_1^2} \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}}.$$

Das hier auftretende Produkt

$$\frac{x_2^2}{x_1^2} \sqrt{\frac{\lambda^2 - k_1^2}{\lambda^2 - k_2^2}}$$

ist in der Nähe des Verzweigungspunktes $\lambda = k_1$ jedenfalls

klein und erreicht im Pole $\lambda = s$, wo ja N verschwindet, den Wert -1 . Sein absoluter Betrag ist also < 1 auf unserer Schleife in der Nähe von $\lambda = k_1$, auf die es bei der Berechnung des Integrals wesentlich ankommt, so daß wir hier $1/N$ nach den aufsteigenden Potenzen jenes Produktes konvergent entwickeln können. Diese Entwicklung wird allerdings auf den entfernteren Teilen unserer Schleife divergent. Wenn wir sie trotzdem für den ganzen Integrationsweg benutzen, so ist das eine Ungenauigkeit, die unter gewissen Umständen (große „numerische Entfernung“) praktisch nicht ins Gewicht fällt, die aber zur Folge hat, daß die abzuleitende Formel strenge genommen nicht konvergiert. Näheres hierüber vgl. unten. Eine weitere Ungenauigkeit lassen wir zu, indem wir die Größe $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$ in N ersetzen durch $\sqrt{k_1^2 - k_2^2}$ mit Rücksicht auf die Voraussetzung 2 und den Umstand, daß die Umgebung von $\lambda = k_1$ für den Wert unseres Integrales maßgebend ist.

Wir erhalten so

$$(36) \quad \frac{1}{N} = \frac{1}{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \sum_{v=0}^{\infty} \left(-\frac{x_2^2}{x_1^2} \sqrt{\frac{\lambda^2 - k_1^2}{k_1^2 - k_2^2}} \right)^v$$

und

$$(37) \quad \begin{cases} Q_1 = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_2^2} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{-x_2^2}{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \right)^{v+1} \\ \qquad \int (\sqrt{\lambda^2 - k_1^2})^v H_1(\lambda r) e^{-V\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} \lambda d\lambda. \end{cases}$$

Die hier auftretenden Integrale sind bekannt. Aus (23a) folgt nämlich durch fortgesetzte Differentiation nach z :

$$\frac{\partial^{v+1}}{\partial z^{v+1}} \frac{e^{ik_1 R}}{R} = (-1)^{v+1} \frac{1}{2} \int (\sqrt{\lambda^2 - k_1^2})^v H_1(\lambda r) e^{-V\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} \lambda d\lambda.$$

Unsere Reihe (37) können wir also in üblicher Symbolik folgendermaßen schreiben:

$$Q_1 = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2^2} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{x_2^2}{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \frac{\partial}{\partial z} \right)^{v+1} \frac{e^{ik_1 R}}{R},$$

oder auch, wen Ω die Operation

$$(38) \quad \Omega = \frac{x_2^2}{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \frac{\partial}{\partial z}$$

und $\Omega^2, \Omega^3, \dots$ die zweimalige, dreimalige Anwendung derselben bedeutet:

$$(39) \quad Q_1 = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2^2} (\Omega + \Omega^2 + \Omega^3 + \dots) \frac{e^{ik_1 R}}{R}.$$

Diese Reihe legt eine sehr einfache physikalische Deutung nahe. Bezeichnen wir unsere primäre Erregung $e^{ik_1 R}/R$ als *einfachen Pol*, so ist

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ik_1 R}}{R} \quad \text{ein } \textit{Dipol},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{ik_1 R}}{R} \quad \text{ein } \textit{Tetrapol} \text{ usw.},$$

entstanden durch das Zusammenrücken von zwei, vier ... einfachen auf der z -Achse gelegenen Polen. Unsere Welle Q_1 entsteht also (vgl. Fig. 5) durch Überlagerung der Wirkung eines Dipoles, Tetrapoles ..., wobei sich die Intensität jeder höheren Singularität durch den Faktor $x_2^2/x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}$ von der der nächst niedrigeren unterscheidet. Bezeichnen wir dagegen mit Hertz, anknüpfend an die Struktur des aus II abzuleitenden elektrischen Feldes, bereits die Erregung $e^{ik_1 R}/R$ als *Dipol*, so wäre

.	+
.	-
+	+
-	-
+	+
.	+
.	-

Fig. 5.

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ik_1 R}}{R} \quad \text{als } \textit{Tetrapol},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{ik_1 R}}{R} \quad \text{als } \textit{Oktopol} \text{ usw.}$$

zu bezeichnen und unser Q_1 durch Überlagerung eines Tetrapoles, Oktopoles ... zu erzeugen.

In dem gemeinsamen Ursprung aller dieser Wirkungen ($R = 0$) wird offenbar jede folgende Erregung von höherer Ordnung unendlich wie die vorhergehende. Dagegen wird in großer Entfernung vom Ursprung wegen der immer vollständigeren Kompensation der zusammengerückten Pole jede folgende Erregung von geringerer Intensität wie die vorhergehende. Dieser Umstand weist bereits darauf hin, daß unsere Darstellung nur für große Entfernungen brauchbar sein kann, wie unten näher präzisiert werden wird.

Auch diese ergänzte Darstellung (39) führt zu dem Ergebnis, daß wir Q_1 als *Raumwelle* anzusprechen haben, da die genannten Dipole, Tetrapole ... die einfachsten Quellentypen von Wellen sind, die sich räumlich im Medium 1 ausbreiten.

Für das Folgende bedürfen wir einer expliziten Ausrechnung der Operation Ω^ν oder $\partial^\nu / \partial z^\nu$. Von den Fällen $\nu = 1, 2, \dots$ schließen wir durch vollständige Induktion leicht auf die folgende Regel: Es sei ω das Symbol $\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}$ und $\omega^2, \omega^3, \dots$ die zweimalige, dreimalige ... Anwendung dieses Differentiationsprozesses; dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} &= z^\nu \omega^\nu + \frac{\nu(\nu-1)}{2} z^{\nu-2} \omega^{\nu-1} \\ &\quad + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2 \cdot 4} z^{\nu-4} \omega^{\nu-2} + \dots + \zeta; \end{aligned}$$

das letzte Glied ζ lautet dabei, je nachdem ν gerade oder ungerade ist:

$$\zeta = \frac{\frac{\nu!}{2^{\frac{\nu}{2}} \left(\frac{\nu}{2}\right)!}}{\omega^{\nu/2}} \quad \text{bzw.} \quad \zeta = \frac{\frac{\nu!}{2^{\frac{\nu-1}{2}} \left(\frac{\nu-1}{2}\right)!}}{z \omega^{\frac{\nu+1}{2}}}.$$

Bedeutet $[\nu/2]$ die größte ganze Zahl $\leq \nu/2$, so können wir durch Eintragen der vorstehenden Entwicklung in (39) Q_1 als Doppelsumme folgendermaßen schreiben:

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_1 = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{[\nu/2]} \left(\frac{x_2^2}{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \right)^{\nu} \\ \quad \frac{\nu(\nu-1) \dots (\nu-2\mu+1)}{2^\mu \mu!} z^{\nu-2\mu} \omega^{\nu-\mu} \left(\frac{e^{ik_1 R}}{R} \right). \end{array} \right.$$

Wir suchen zunächst die Glieder niedrigster Ordnung in $1/R$ auf, nämlich die Glieder mit $1/R^2$. Dieselben werden allein durch das Symbol ω^1 geliefert, und zwar ist

$$\omega^1 \left(\frac{e^{ik_1 R}}{R} \right) = \left(\frac{i k_1}{R^2} - \frac{1}{R^3} \right) e^{ik_1 R},$$

während ω^2 bereits von der Ordnung $1/R^3$, ω^3 von der Ordnung $1/R^4$ ist. Es gibt aber zwei Glieder in unserer Reihe mit ω^1 , für die also $\nu - \mu = 1$ ist, nämlich $\nu = 2, \mu = 1$ und $\nu = 1, \mu = 0$. Indem wir nur diese beiden Glieder bei-

behalten und auch in ω^1 das Glied mit $1/R^3$ gegen das Glied $i k_1/R^2$ streichen, wird aus (40):

$$Q_1 = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2^2} \left(\frac{x_2^4}{x_1^4(k_1^2 - k_2^2)} + \frac{x_2^2 z}{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \right) \omega \left(\frac{e^{ik_1 R}}{R} \right)$$

$$= -\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2^2} i k_1 \left(\frac{x_2^4}{x_1^4(k_1^2 - k_2^2)} + \frac{x_2^2 z}{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \right) \frac{e^{ik_1 R}}{R^2}.$$

Somit haben wir genau den Wert (33a) für Q_1 wiedergefunden, mit der Erweiterung, daß R an die Stelle von r getreten ist, daß wir also nicht mehr auf die unmittelbare Nähe der Erdoberfläche ($z = 0$) uns zu beschränken brauchen. Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen werden also durch die jetzige eingehendere Untersuchung bestätigt.

Zur Feststellung des Gültigkeitsbereiches müssen wir weiterhin die höheren Glieder beibehalten; im Interesse der Einfachheit wollen wir aber nun $z = 0$, also $R = r$ setzen. Dann bleiben in (40) nur diejenigen Glieder übrig, in denen v gerade und $\mu = v/2$ ist, weil alle übrigen Glieder mit einer Potenz von z behaftet sind. Benutzen wir also μ als Summationsindex und setzen dementsprechend $v = 2\mu$, so reduziert sich die Doppelsumme auf die folgende einfache:

$$Q_1 = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2^2} \sum_{1(\mu)}^{\infty} \left(\frac{x_2^2}{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \right)^{2\mu} \frac{(2\mu)!}{2^\mu \mu!} \omega^\mu \left(\frac{e^{ik_1 r}}{r} \right).$$

Bei der Berechnung von ω^μ dürfen wir wegen der Voraussetzung 1 am Anfang dieses Paragraphen näherungsweise setzen:

$$\omega^\mu \left(\frac{e^{ik_1 r}}{r} \right) = \left(\frac{ik_1}{r} \right)^\mu \frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Zur Begründung verweisen wir auf den oben angegebenen Wert von ω^1 oder auf den daraus folgenden von

$$\omega^2 \left(\frac{e^{ik_1 r}}{r} \right) = \left(-\frac{k_1^2}{r^3} - \frac{3ik_1}{r^4} + \frac{3}{r^5} \right) e^{ik_1 r}$$

$$= \left(\frac{ik_1}{r} \right)^2 \left(1 - \frac{3}{ik_1 r} + \frac{3}{(ik_1 r)^2} \right) \frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Nach dieser Vereinfachung ergibt sich

$$Q_1 = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2^2} \sum_{1(\mu)}^{\infty} \left(\frac{x_2^2 \sqrt{ik_1}}{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2} \sqrt{r}} \right)^{2\mu} \frac{(2\mu)!}{2^\mu \mu!} \frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Setzen wir noch etwa (wegen Voraussetzung 2 vom Anfange dieses Paragraphen) den Faktor vor der Summe gleich 1 und führen wir die wichtige Abkürzung ein:

$$(41) \quad \alpha = \frac{x_1^2}{x_2^2} \sqrt{\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2}} \sqrt{\frac{r k_1}{2 i}},$$

so ergibt sich

$$(42) \quad Q_1 = - \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \frac{1}{\alpha^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{1}{\alpha^6} + \dots \right) \frac{e^{i k_1 r}}{r}.$$

Aus dieser Form können wir bequem auf die Bedingung der Gültigkeit unserer jetzigen und früheren Darstellung schließen. Die Beschränkung auf das erste Glied unserer Reihe, entsprechend der Rechnung des vorigen Paragraphen, ist jedenfalls nur dann berechtigt, wenn $|\alpha^2| \gg 1$ ist. Der absolute Betrag von α^2 soll uns die schon mehrfach genannte *numerische Entfernung* definieren. Sie sei

$$(43) \quad \varrho = |\alpha^2| = \left| \frac{x_1^4}{x_2^4} \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2} \frac{k_1 r}{2} \right|.$$

Wir können also sagen: *die Näherungsformeln des vorigen Paragraphen sind nur berechtigt, wenn die numerische Entfernung eine große Zahl ist.*

Unter derselben Voraussetzung ist aber auch die jetzige Reihe allein brauchbar. Dieselbe ist nämlich divergent, weil das Verhältnis des N^{ten} zum $(N-1)^{\text{ten}}$ Gliede gleich $(2N-1)/2\alpha^2$ ist, was nach einer Bemerkung über die Divergenz der ursprünglichen Potenzreihe auf den entfernteren Teilen des Integrationsweges nicht wundernehmen kann. Die Meinung unserer Entwicklung muß daher die sein, daß wir die ursprüngliche Potenzreihe nur bis zu einem geeigneten, nicht zu hoch gewählten Gliede benutzen und durch ein Restglied abschließen. Dadurch würden auch die Reihen (32), (39), (40), (42) in die Form endlicher Reihen mit Restglied übergehen, welch letzteres bei hinreichend hoher numerischer Entfernung absolut genommen klein gehalten werden kann. In dieser Auffassung scheint also die Divergenz unserer Reihen keine Schwierigkeit zu bieten.

Reihe (42) läßt sich auch in geschlossener Form schreiben, nämlich wie folgt:

$$(44) \quad Q_1 = (1 + 2 \alpha e^{-\alpha^2} \int_a^{i\infty} e^{\beta^2} d\beta) \frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Entwickelt man nämlich durch fortgesetzte partielle Integration das vorstehende Integral nach negativen Potenzen von α , ähnlich wie es bei den analogen Fresnelschen Integralen üblich ist, so ergibt sich

$$\int_a^{i\infty} e^{\beta^2} d\beta = -\frac{e^{\alpha^2}}{2\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \frac{1}{\alpha^4} + \dots \right).$$

Auch diese Reihe ist natürlich divergent und durch ein Restglied abzuschließen. Setzt man sie in (44) ein, so entsteht in der Tat genau (42).

Was die Definition der numerischen Entfernung betrifft, so sei hervorgehoben, daß in einem besonders wichtigen Fall ϱ direkt gleich α^2 gesetzt, also das Zeichen des absoluten Betrages unterdrückt werden kann. Es ist dies der Fall: k_2^2 rein imaginär, k_1 reell. Letzteres trifft immer hinreichend nahe bei ungedämpften Wellen zu, ersteres dann, wenn die Leitfähigkeit des Bodens groß genug und die Frequenz nicht zu groß ist. Nähere Zahlenangaben findet man in § 9. Hierzu kommt noch die im Anfange dieses Paragraphen genannte Bedingung: k_1 klein gegen $|k_2|$. In diesem Falle können wir nach der Definitionsgleichung (41) von α und mit Rücksicht auf $x_1^2 = k_1^2/\mu_1$, $x_2^2 = k_2^2/\mu_2$ schreiben:

$$\alpha^2 = \frac{-x_1^4}{x_2^4} \frac{k_2^2}{k_1^2} \frac{r k_1}{2 i} = \frac{k_1^2}{(-i k_2^2)} \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \frac{k_1 r}{2}.$$

Da nun alle Faktoren dieses Produktes positiv-reelle Zahlen sind, so ergibt sich in der Tat α^2 als reell und positiv und $\varrho = \alpha^2$. Dementsprechend können wir in diesem Falle die Gleichung (42) und (44) direkt in ϱ schreiben:

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_1 = - \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\varrho} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \frac{1}{\varrho^3} + \dots \right) \frac{e^{ik_1 r}}{r} \\ = (1 + 2 \sqrt{\varrho} e^{-\varrho}) \int_{V_\varrho}^{i\infty} e^{\beta^2} d\beta \frac{e^{ik_1 r}}{r}. \end{array} \right.$$

Hieran schließt sich eine Bemerkung, welche auch die vorangehenden Umrechnungen betrifft und deren Sicherheit bis zu einem gewissen Grade in Frage stellt: Bei reellem ϱ ist der Faktor von $e^{ik_1 r}/r$ in dem ersten Ausdrucke von (45) reell, in dem zweiten aber komplex, da sich das Integral in einen reellen Teil von $\sqrt{\varrho}$ bis 0 und einen rein imaginären von 0 bis $i\infty$ zerlegen lässt. Eine solche Gleichheit zwischen Reell und Komplex ist natürlich unmöglich. Sie ist hier offenbar, wie alle unsere Entwicklungen, *asymptotisch* für $\varrho=\infty$ aufzufassen, so nämlich, daß die Gleichheit erfüllt ist bis auf Terme, die von höherer Ordnung als jede negative Potenz von ϱ , also z. B. wie $e^{-\varrho}$ verschwinden. Nur von dieser Ordnung ist aber in der Tat der Beitrag, den der imaginäre Teil des genannten Integrals zu dem zweiten Ausdruck (45) liefert.

Schließlich wollen wir noch die Oberflächenwelle P in eine zu (44) analoge Form schreiben. Wir beschränken uns dabei auf die unmittelbare Nähe der Erdoberfläche, setzen also $z = 0$ und nehmen k_1 als klein gegen $|k_2|$ an. Dann folgt zunächst aus (17):

$$s = k_1 \sqrt{\frac{1 - k_2^2 x_1^4/k_1^2 x_2^4}{1 - x_1^4/x_2^4}} = k_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x_1^4}{x_2^4} \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2} \right)$$

und

$$e^{i s r} = e^{i k_1 r} e^{-\alpha^2},$$

während nach Gleichung (26a) wird

$$C = - \frac{x_1^2}{x_2^2} \sqrt{k_2^2 - k_1^2}, \quad C e^{-\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{sr}} = - \frac{2i\alpha\sqrt{\pi}}{r},$$

also nach (26c):

$$(46) \quad P = - 2i\alpha\sqrt{\pi} e^{-\alpha^2} \frac{e^{i k_1 r}}{r}.$$

In dem besonderen Falle: k_2^2 rein imaginär, k_1 reell: können wir ähnlich wie oben α^2 durch ϱ ersetzen und schreiben:

$$(46a) \quad P = - 2i\sqrt{\pi\varrho} e^{-\varrho} \frac{e^{i k_1 r}}{r}.$$

Zugleich ergibt sich noch für die Summe $P + Q_1$, welche bis auf den zu vernachlässigenden Bestandteil Q_2 unsere totale

Erregung Π_1 im Medium 1 darstellt, eine elegante zusammenfassende Formel. Wir berücksichtigen, daß

$$(46b) \quad \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2} d\beta = -i \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\beta^2} d\beta.$$

Dann ist (46) identisch mit

$$P = -2\alpha e^{-\alpha^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\beta^2} d\beta \frac{e^{ik_1 r}}{r}$$

und die Summe von (44) und (46) liefert:

$$(47) \quad \Pi_1 = P + Q_1 = \left(1 - 2\alpha e^{-\alpha^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\beta^2} d\beta\right) \frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Dieselbe Formel werden wir im nächsten Paragraphen wiederfinden und zwar auf einwandfreiem Wege, während die vorstehende Rechnung nach obigem nur ein asymptotisch, d. h. in den Potenzen von α richtiges Resultat zu liefern braucht, während Glieder von der Ordnung $e^{-\alpha^2}$, zu denen auch P gehört, unsicher sein können.

§ 8. Der Grenzfall des vollkommenen Leiters. Reihenentwicklung bei kleiner numerischer Entfernung.

Wie am Schlusse der §§ 5 und 6 bemerkt wurde, führen unsere Formeln im Falle eines sehr großen k_2 zu Unzuträglichkeiten: die Amplitude der Oberflächenwellen P wird Null, die der Raumwellen Q scheinbar unendlich. Andererseits zeigte der vorige Paragraph, daß unsere Entwicklung für Q_1 nur bei großer numerischer Entfernung ϱ brauchbar sind. Bei unendlich wachsendem k_2 wird aber ϱ für beliebige Werte von r gleich Null, so daß in diesem Grenzfall überhaupt kein Anwendungsgebiet für unsere bisherigen Formeln übrig bleibt.

Wir müssen daher unsere bisherigen Formeln ergänzen, durch *Entwicklungen für kleine numerische Entfernung ϱ* . In ihnen wird der Grenzfall des vollkommenen Leiters für $\varrho = 0$ enthalten sein. Wir sahen bereits am Ende des § 3, daß in diesem Grenzfall Π_1 übergehen muß in die bekannte Funktion $e^{ik_1 R}/R$, die bezüglich ihrer Abnahme mit der Entfernung

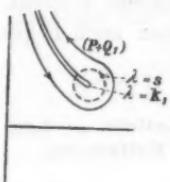
(wie r^{-1}) die Mitte hält zwischen der Abnahme von P (wie $r^{-\frac{1}{2}}$) und der von Q_1 (wie r^{-2} in erster Näherung).

Der analytische Grund für das Versagen unserer bisherigen Darstellung wird durch eine Bemerkung von p. 691 geklärt: Bei wachsendem k_2 rückt der Pol $\lambda = s$ dem Verzweigungspunkte $\lambda = k_1$ unbegrenzt näher; eine Trennung der Integrationswege von P und Q_1 , die zwischen Pol und Verzweigungspunkt festgelegt sind, wird schließlich unmöglich und die resultierende Darstellung unbrauchbar. Für die jetzigen Zwecke müssen wir daher auf eine Abtrennung der Oberflächenwellen verzichten und in der Darstellung (28)

$$\Pi_1 = (P + Q_1) + Q_2$$

die Bestandteile $(P + Q_1)$ gemeinsam behandeln, während wir (vgl. den Anfang des vorigen Paragraphen) Q_2 vernachlässigen dürfen.

$(P + Q_1)$ und also auch näherungsweise Π_1 wird wieder durch das Integral (29) gegeben, das auf einer Schleife um



den Verzweigungsschnitt $k_1 \infty$ zu erstrecken ist, so aber, daß jetzt der Pol $\lambda = s$ eingeschlossen wird (Fig. 6). Wir haben jetzt genau reziprok zu verfahren wie im vorigen Paragraphen. Wir schreiben:

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{x_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x_1^2}{x_2^2} \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}}.$$

Fig. 6. Der absolute Betrag des Produktes

$$\frac{x_1^2}{x_2^2} \sqrt{\frac{\lambda^2 - k_2^2}{\lambda^2 - k_1^2}},$$

welches das Reziproke der im vorigen Paragraphen benutzten Entwicklungsgröße ist, ist groß in nächster Nähe des Verzweigungspunktes k_1 , gleich 1 im Pole s , wo ja $N = 0$ wird, und < 1 auf unserem Schleifenwege, wenn dieser (vgl. Fig. 6) außerhalb einer durch den Pol s gehenden, in der Figur punktierten und nahezu kreisförmigen Linie verläuft, und zwar nicht nur auf den dem Punkte $\lambda = k_1$ benachbarten Teilen des Weges, sondern wegen $|x_2| > |x_1|$ auch auf den entfernten Teilen. Daher konvergiert die nach aufsteigenden Potenzen

jenes Produktes fortschreitende Reihe auf dem ganzen Integrationswege. Erlauben wir uns wieder die Ungenauigkeit, $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$ zu ersetzen durch $\sqrt{k_1^2 - k_2^2}$ (vgl. den vorigen Paragraphen), so lautet die an Stelle von (36) tretende Reihe

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2^2} \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \sum_0^{\infty} \left(-\frac{x_1^2}{x_2^2} \sqrt{\frac{k_1^2 - k_2^2}{\lambda^2 - k_1^2}} \right)^v$$

und unser Integral:

$$(48) \quad \Pi_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2^2} \sum_0^{\infty} \left(-\frac{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}}{x_2^2} \right)^v X_v$$

mit der Abkürzung

$$(48a) \quad X_v = \frac{1}{2} \int_{(\lambda^2 - k_1^2)^{\frac{v+1}{2}}} \frac{\lambda d\lambda}{H_1(\lambda r) e^{-V\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z}}.$$

Auch diese Integrale X_v lassen sich aus der einfachen Funktion $e^{ik_1 R}/R$ ableiten, nur nicht wie die entsprechenden Größen im vorigen Paragraphen durch Differentiation, sondern durch Integration. Zunächst ist X_0 nach Gleichung (23a) identisch mit $e^{ik_1 R}/R$ selbst. Ersetzen wir nun in (23a) z durch $z - \zeta$ und dementsprechend R durch $R_\zeta = \sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}$ und integrieren (23a) beiderseits nach ζ von $\zeta = -\infty$ bis $\zeta = 0$, so lässt sich die Integration rechts unter dem Integralzeichen ausführen und es verschwindet der Beitrag der unteren Grenze $\zeta = -\infty$. Daher

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ik_1 R_\zeta}}{R_\zeta} d\zeta = \frac{1}{2} \int_{\lambda^2 - k_1^2}^0 \frac{\lambda d\lambda}{H_1(\lambda r) e^{-V\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z}},$$

also gleich X_1 . Wählen wir sodann nicht $\zeta = 0$, sondern $\zeta = \zeta_1$ als obere Grenze der Integration nach ζ und fügen eine zweite Integration nach ζ_1 hinzu von $\zeta_1 = -\infty$ bis $\zeta_1 = 0$, so entsteht aus der vorigen Gleichung:

$$\int_{-\infty}^0 d\zeta_1 \int_{-\infty}^{\zeta_1} d\zeta \frac{e^{ik_1 R_\zeta}}{R_\zeta} = \frac{1}{2} \int_{(\lambda^2 - k_1^2)^{\frac{v+1}{2}}} \frac{\lambda d\lambda}{H_1(\lambda r) e^{-V\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z}},$$

also unser X_v . Man kann die linke Seite hier auch als einfaches Integral schreiben. Deutet man nämlich ζ und ζ_1 als

rechtwinklige Achsen in einer Ebene, so erstreckt sich das Doppelintegral der vorigen Formel über denjenigen Sektor des III. Quadranten dieser Ebene, der begrenzt wird von der negativen ζ -Achse und der den Winkel zwischen der negativen ζ - und ζ_1 -Achse halbierenden Geraden. Führt man aber die Integration nach ζ_1 vor derjenigen nach ζ aus, so folgt einfacher

$$\int_{-\infty}^0 d\zeta \frac{e^{ik_1 R}}{R_\zeta} \int_{-\zeta}^0 d\zeta_1 = - \int_{-\infty}^0 d\zeta \cdot \zeta \frac{e^{ik_1 R}}{R_\zeta}.$$

So fortlaufend erkennt man: Man erhält X_ν durch ν -fache Integration aus $e^{ik_1 R}/R$ mittels der Formel

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^0 d\zeta_{\nu-1} \int_{-\infty}^{\zeta_{\nu-1}} d\zeta_{\nu-2} \cdots \int_{-\infty}^{\zeta_1} d\zeta \frac{e^{ik_1 R}}{R_\zeta} \\ = \frac{1}{2} \int \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2 - k_1^2)^{\frac{\nu+1}{2}}} H_1(\lambda r) e^{-V\lambda^2 - k_1^2 z}, \end{array} \right.$$

wobei man der linken Seite auch den einfacheren Ausdruck

$$(49a) \quad X_\nu = \frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \int_{-\infty}^0 d\zeta \zeta^{\nu-1} \frac{e^{ik_1 R}}{R_\zeta}$$

geben kann. Deutet man also die linke Seite von (49) symbolisch durch $(\int d\zeta)^{\nu} e^{ik_1 R}/R$ an, so schreibt sich (48):

$$\Pi_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2^2} \sum_0^\infty \left(-\frac{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}}{x_2^2} \int d\zeta \right)^\nu \frac{e^{ik_1 R}}{R}.$$

Endlich führen wir die zur Operation Ω des vorigen Paragraphen reziproke Operation

$$\Omega^{-1} = -\frac{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}}{x_2^2} \int d\zeta$$

ein. Dann ergibt sich die zu (39) analoge und „reziproke“ Darstellung:

$$(50) \quad \Pi_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2^2} (1 + \Omega^{-1} + \Omega^{-2} + \dots) \frac{e^{ik_1 R}}{R}.$$

Die Bedeutung der Operation Ω^{-1} ist nach dem Obigen klar: man ersetze in der Funktion, auf welche sie angewandt wird,

z durch $z - \zeta$ und integriere nach ζ von $-\infty$ bis 0; außerdem füge man den Faktor $-\kappa_1^2/\sqrt{k_1^2 - k_2^2/\kappa_2^2}$ hinzu. Entsprechend ist die ν -fache Wiederholung dieser Operation im Anschluß an Gleichung (49) aufzufassen.

Wir geben zunächst eine physikalische Deutung unserer Reihe (50). Das erste Glied wollen wir wieder bezeichnen als „einfachen Pol“ oder als „punktformige Erregung“. Das zweite Glied ist ein Integral von $\zeta = -\infty$ bis $\zeta = 0$, dessen Element ebenfalls eine punktformige Erregung an der Stelle $z = \zeta$ von der Stärke $-(\kappa_1^2/\kappa_2^2)\sqrt{k_1^2 - k_2^2}d\zeta$ bedeutet. Im ganzen stellt daher das zweite Glied eine „linienförmige Erregung“ dar, nämlich die Erregung einer einseitig (bei $z = 0$) begrenzten Geraden von konstanter Belegung. Das dritte Glied entsteht nach (49a), wenn wir die Linienerregung nicht gleichförmig nehmen, sondern proportional mit ζ anwachsen lassen nach dem Gesetze:

$$-(\sqrt{k_1^2 - k_2^2}\kappa_1^2/\kappa_2^2)^2\zeta d\zeta.$$

Stellen wir die Belegungsdichten durch eine senkrecht zur Linie aufgetragene Koordinate dar, so ergibt sich jetzt eine Dreiecksfläche, im vorhergehenden Fall eine Rechtecksfläche. Entsprechend den Faktoren $\zeta^2/2$, $\zeta^3/3!$ in (49a) haben wir (vgl. Fig. 7) bei den folgenden Gliedern die Fläche einer Parabel 2^{ter} , 3^{ter} ... Ordnung aufzutragen. Die Gesamtwirkung Π_1 setzt sich also zusammen aus einer punktformigen Erregung, einer linienförmigen Erregung mit Rechtecks-, Dreiecks-, gewöhnlicher und höherer Parabel-Belegung.

Jeder einzelne dieser Wellentypen darf als Raumwelle des Mediums 1 bezeichnet werden, da er sich von den supponierten Erregungsstellen aus im Medium 1 unabhängig von der Anwesenheit und den Materialkonstanten des Mediums 2 auszubreiten vermag; nur auf die Stärke des einzelnen Wellentypus haben die Materialkonstanten des Mediums 2 Einfluß. Das Resultat der Überlagerung aller dieser Wellentypen wird man aber kaum mehr als Raumwelle bezeichnen wollen, da es ja

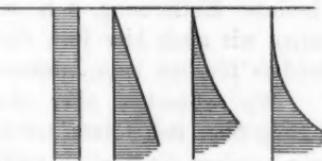


Fig. 7.

unserer früheren Summe $P + Q_1$ von Raum- und Oberflächenwelle äquivalent ist. Wie in der Einleitung bemerkt, ist eben die Grenze zwischen Raum- und Oberflächenwellen keine scharfe.

Über die Struktur der einzelnen Wellentypen sei noch folgendes bemerkt: In dem gemeinsamen Endpunkte unserer Belegungen ($z = 0, R = 0$) ist jeder folgende Wellentypus unserer Reihe von geringerer Intensität, wie der vorhergehende. Z. B. wird hier die erste (punktformige) Erregung unendlich wie $1/R$, die zweite (linienförmige) nur noch logarithmisch unendlich, die dritte (linienförmige mit Dreiecksbelegung) bleibt endlich, bei den höheren Gliedern bleiben auch noch je eine Anzahl Differentialquotienten endlich. Dagegen wird in großem Abstand die Reihenfolge der Stärke die umgekehrte sein: die zweite (linienförmige) Erregung wird weiter tragen wie die erste (punktformige) usw. Die Verhältnisse liegen auch in dieser Hinsicht reziprok zu den im vorigen Paragraphen geschilderten Umständen. Dementsprechend wird die jetzige Entwicklung nur für kleine „numerische Entfernungen“ (vgl. unten) praktisch brauchbar sein. An der Annahme großer absoluter Entfernung, d. h. an der Annahme eines großen $k_1 r$ halten wir auch hier fest, da die unmittelbare Umgebung des Senders für uns kein Interesse hat.

Wir wünschen aber nicht nur eine allgemeine Orientierung über den Charakter der vorliegenden Reihenentwicklung, sondern die Möglichkeit ihrer zahlenmäßigen Beherrschung zu haben.

Deshalb geben wir zunächst eine Formel zur rekurrenten Berechnung der X_ν , nämlich

$$(51) \quad (\nu + 1) X_{\nu+2} + z X_{\nu+1} = \frac{1}{k_1^2} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} - (\nu - 1) \right\} X_\nu$$

Man beweist dieselbe z. B. von der reellen Integraldarstellung (49a) aus, indem man die rechte und linke Seite mittels partieller Integration nach ζ auf den gemeinsamen Wert

$$\frac{(-1)^\nu}{(\nu - 1)!} \frac{1}{i k} \int_{-\infty}^0 \zeta^{\nu-1} e^{ikR_\zeta} d\zeta$$

zurückführt. Nach (51) lässt sich X_2, X_3, \dots aus X_0 und X_1 berechnen. Z. B. ergibt sich

$$X_2 = -z X_1 - \frac{1}{i k_1} e^{ik_1 r},$$

$$2 X_3 = z^2 X_1 + \frac{z}{i k_1} e^{ik_1 r} + \frac{1}{k_1^3} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} \right\} X_1.$$

In dieser Allgemeinheit ist das Bildungsgesetz nicht übersichtlich. Wir nehmen daher weiterhin, wie am Ende des vorigen Paragraphen, $z=0$ und $k_1 r$ als große Zahl an.

Dann wird zunächst für gerade Werte $\nu = 2\mu$:

$$X_0 = \frac{e^{ik_1 r}}{r}, \quad X_2 = \frac{1}{1} \frac{i}{k_1} e^{ik_1 r},$$

$$X_4 = \frac{1}{1 \cdot 3} \frac{i}{k_1} \frac{1}{k_1^3} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} - 1 \right\} e^{ik_1 r} = \frac{1}{1 \cdot 3} \left(\frac{i}{k_1} \right)^3 r e^{ik_1 r},$$

wenn wir -1 gegen $ik_1 r$ streichen. Allgemein ist

$$(51a) \quad X_{2\mu} = \frac{1}{1 \cdot 3 \dots (2\mu-1)} \left(\frac{i r}{k_1} \right)^\mu \frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

In der Tat folgt dann aus (51)

$$X_{2\mu+2} = \frac{1}{1 \cdot 3 \dots (2\mu-1)(2\mu+1)} \frac{1}{k_1^3} \\ [i k_1 r + (\mu-1) - (2\mu-1)] \left(\frac{i r}{k_1} \right)^\mu \frac{e^{ik_1 r}}{r},$$

ein Ausdruck, der sich unter den Wert (51a) subsumiert, wenn man $-\mu$ gegen $ik_1 r$ streicht.

Was die ungeraden Werte von $\nu = 2\mu+1$ betrifft, so bestimmen wir zunächst X_1 . Aus der Definitionsgleichung (48a) ergibt sich nach dem Cauchyschen Satze für $z=0$ unmittelbar

$$X_1 = \frac{\pi i}{2} H_1(k_1 r)$$

und für große Werte von $k_1 r$ nach (22)

$$X_1 = \sqrt{\frac{\pi r}{2 k_1}} e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Der schon angegebene Wert von X_3 geht daraufhin für $z=0$ und großes $k_1 r$ über in

$$X_3 = \sqrt{\pi} \left(\frac{r}{2 k_1} \right)^{3/2} e^{\frac{3i\pi}{4}} \frac{e^{ik_1 r}}{r},$$

und es wird allgemein

$$(51 \text{ b}) \quad X_{2\mu+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{\mu!} \left(\frac{r}{2k_1} \right)^{\frac{2\mu+1}{2}} e^{-\frac{(2\mu+1)i\pi}{4}} \cdot \frac{e^{ik_1 r}}{r},$$

wie man wieder durch Anwendung der Rekursionsformel (51) und den Schluß von μ auf $\mu+1$ bestätigt. Die Werte (51a) und (51b) lassen sich mit Hilfe der Γ -Funktion zusammenfassen in:

$$(51 \text{ c}) \quad X_r = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)} \left(\frac{ir}{2k_1} \right)^{\frac{r}{2}} \frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Infolgedessen wird nach (48)

$$\Pi_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2^2} \sum_0^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)} \left(-\frac{x_1^2}{x_2^2} \sqrt{\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2}} \sqrt{\frac{i r k_1}{2}} \right)^r \frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Nach der Definition von α (Gleichung (41)) können wir hierfür schreiben:

$$(52) \quad \Pi_1 = \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)} (-i\alpha)^r \frac{e^{ik_1 r}}{r};$$

zugleich haben wir, was erlaubt ist, den Faktor vor der Summe durch 1 und $\sqrt{\pi}$ durch $\Gamma(1/2)$ ersetzt.

Diese Summe ist konvergent für alle Werte von α , wie es nach der Konvergenz der Potenzreihe, von der wir ausgingen (vgl. p. 712), nicht anders zu erwarten war. Trotzdem ist sie nur brauchbar, d. h. durch die ersten Glieder hinreichend gut dargestellt, wenn α absolut genommen nicht zu groß ist. Wir werden also jetzt auf die Bedingung geführt, daß die numerische Entfernung $q = |\alpha|$ keine große Zahl sein darf, und sehen, daß die Entwicklung dieses Paragraphen diejenige des vorigen Paragraphen für das Gebiet kleiner numerischer Entfernung in willkommener Weise ergänzt.

Das erste Glied der Reihe (52) (für $r=0$) lautet $e^{ik_1 r}/r$; hätten wir nicht $z=0$ gesetzt, so würde sich als solches ergeben haben $e^{ik_1 z}/R$ in Übereinstimmung mit dem Schluß von § 3, d. h. diejenige Funktion, die bisher dem Studium der Ausbreitung der funkentelegraphischen Wellen von Abraham zugrunde gelegt wurde. Gleichung (52) zeigt also, wie sich dieser

einfachste Typus einer punktförmigen Erregung bei wachsender numerischer Entfernung in kompliziertere Wellentypen umgesetzt. Brechen wir (52) mit dem zweiten Gliede ($\nu = 1$) ab, so ergibt sich:

$$(53) \quad \Pi_1 = (1 - i\alpha\sqrt{\pi}) \frac{e^{ik_1 r}}{r},$$

an welche Formel die Zahlenrechnungen des nächsten Paragraphen anknüpfen werden.

Wollen wir (52) vollständig berechnen, so empfiehlt es sich, die Glieder mit geradem und die mit ungeradem ν für sich zusammenzufassen. Man erhält wegen der schon benutzten Bedeutung der Γ -Funktion bei ungeradem und geradem ν :

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_1 = \left(1 - \frac{2}{1} \alpha^2 + \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \alpha^4 - \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 3 \cdot 5} \alpha^6 + \dots \right) \frac{e^{ik_1 r}}{r} \\ \quad + \sqrt{\pi} (-i\alpha) \left(1 - \frac{\alpha^2}{1!} + \frac{\alpha^4}{2!} - \frac{\alpha^6}{3!} + \dots \right) \frac{e^{ik_1 r}}{r}. \end{array} \right.$$

Wir können die hier auftretenden Reihen leicht summieren. Die Reihe der zweiten Zeile ist direkt $e^{-\alpha^2}$. Bezeichnen wir diejenige der ersten mit

$$A = 1 - \frac{2}{1} \alpha^2 + \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \alpha^4 - \dots,$$

so findet man

$$\frac{A - 1}{2\alpha} = -\alpha + \frac{2}{1} \frac{\alpha^2}{3} - \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \frac{\alpha^4}{5} + \dots,$$

also

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{A - 1}{2\alpha} = -1 + \frac{2}{1} \alpha^2 - \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \alpha^4 + \dots = -A.$$

Dieser Differentialgleichung für A sowie der Anfangsbedingung $dA/d\alpha = 0$ für $\alpha = 0$ genügt nun die Funktion

$$A = 1 - 2\alpha e^{-\alpha^2} \int_0^\alpha e^{\beta^2} d\beta,$$

welche somit die fragliche Summe darstellt. Statt (54) haben wir also auch die geschlossene Formel

$$(55) \quad \Pi_1 = \left(1 - 2\alpha e^{-\alpha^2} \int_0^\alpha e^{\beta^2} d\beta - i\alpha\sqrt{\pi} e^{-\alpha^2} \right) \frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Sie ist vollkommen identisch mit Gleichung (47), indem vermöge (46b) geschrieben werden kann

$$\sqrt{\pi} = -2i \int_{-\infty}^0 e^{\beta^2} d\beta.$$

Durch die Übereinstimmung der (allerdings auf die Ebene $z=0$ beschränkten) Formeln (55) und (47) ist der Anschluß unserer jetzigen an die früheren Entwickelungen vollzogen.

Trotzdem bleibt hier eine gewisse Unstimmigkeit bestehen, auf welche hingewiesen werden muß. Sie tritt insbesondere im Falle eines reellen $\alpha^2 = \varrho$ (k_2^2 rein imaginär) hervor. Dann ist Q_1 nach der Reihendarstellung (45), abgesehen von dem Faktor $e^{ik_1 r}/r$, reell, P nach (46a), abgesehen von demselben Faktor, rein imaginär. Zerlegen wir aber Π_1 nach (55) in die zwei Teile

$$u e^{ik_1 r}/r \quad \text{und} \quad -iv e^{ik_1 r}/r,$$

wo u und v reell sind, nämlich

$$(55a) \quad u = 1 - 2\sqrt{\varrho} e^{-e} \int_0^\infty e^{\beta^2} d\beta, \quad v = \sqrt{\varrho} \pi e^{-e},$$

so ist $-iv e^{ik_1 r}/r$ nicht, wie man erwarten sollte, gleich P , sondern gleich $P/2$ und $u e^{ik_1 r}/r$ nicht gleich Q_1 , sondern gleich $Q_1 + P/2$. Den Grund für diese Unstimmigkeit haben wir in dem zu sehen, was p. 710 über die *asymptotische* Gültigkeit der Entwickelungen des vorigen Paragraphen gesagt wurde, welche Glieder von der Ordnung e^{-e} im allgemeinen nicht wiederzugeben vermögen.

§ 9. Zahlenrechnungen.

Für die Zahlenrechnungen setzen wir $\mu_1 = \mu_2 = 1$, so daß $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$; ferner nehmen wir k_1 als reell (Leitfähigkeit der Luft verschwindend klein, Wellen ungedämpft). Dann ist $k_1 = 2\pi/l$, wenn l die Wellenlänge bedeutet. l beträgt etwa 2 km bei den großen transatlantischen Stationen, 0,36 km bei den deutschen Küstenstationen. Die Frequenz n ist gleich $2\pi c/l$.

Nach den Gleichungen (1) ist für $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\epsilon_1 = 1$, $\sigma_1 = 0$:

$$\frac{k_2^2}{k_1^2} = \epsilon_2 + \frac{i\sigma_2}{n} = \epsilon_2 + \frac{i\sigma_2 l}{2\pi c}.$$

Unsere modifizierte elektrostatisch gemessene Leitfähigkeit σ_2 hängt mit der in gewöhnlicher Weise in C.G.S.-Einheiten gemessenen Leitfähigkeit σ folgendermaßen zusammen: $\sigma_2 = 4\pi\sigma c^2$. Daher

$$\frac{k_2^2}{k_1^2} = \epsilon_2 + 2i\sigma cl.$$

Weiterhin kommt alles auf die Größe unserer numerischen Entfernung an. Ist das vorgenannte Verhältnis nicht zu klein¹⁾, so haben wir nach (43), wenn wir $(k_2^2 - k_1^2)/k_1^2$ näherungsweise ersetzen durch k_2^2/k_1^2 :

$$\varrho = \frac{k_1^2}{|k_2^2|} \frac{k_1 r}{2} = \frac{\pi r / l}{|\epsilon_2 + 2i\sigma cl|}.$$

Für r nehmen wir, entsprechend der Marconischen transatlantischen Station $r = 1/4$ Erdquadrant = $1/4 \cdot 10^4$ km; l sei = 2 km wie bei der deutschen Station Nauen. Die Daten für ϵ_2 und σ entlehnen wir für die hauptsächlich in Betracht kommenden Oberflächenarten einer Arbeit von Zenneck.²⁾ Außer ϱ wollen wir wegen des folgenden auch $\sqrt{\varrho\pi}$ berechnen:

Seewasser:

$$\sigma = 10^{-11}, \quad \epsilon_2 = 80, \quad 2\sigma cl = 12 \cdot 10^4 = |\epsilon_2 + 2i\sigma cl|,$$

also

$$\varrho = \frac{1}{30}, \quad \sqrt{\varrho\pi} = \frac{1}{3}.$$

Süßwasser:

$$\sigma = 10^{-14}, \quad \epsilon_2 = 80, \quad 2\sigma cl = 120, \quad |\epsilon_2 + 2i\sigma cl| = 145,$$

also

$$\varrho = 30, \quad \sqrt{\varrho\pi} = 10.$$

Nasser Boden:

$$\sigma = 5 \cdot 10^{-14}, \quad \epsilon_2 = 10, \quad 2\sigma cl = 600, \quad |\epsilon_2 + 2i\sigma cl| = 600,$$

also

$$\varrho = 6,5, \quad \sqrt{\varrho\pi} = 4,5.$$

1) Selbst bei trockenem Boden (vgl. unten) ist der absolute Betrag desselben immer noch etwa 18. Der Fehler bei der Berechnung von ϱ würde also nur etwa 10 Proz. ausmachen.

2) J. Zenneck, Ann. d. Phys. 23. p. 859 unter c). 1907.

Trockener Boden:

$$\sigma = 10^{-15}, \quad \epsilon_2 = 4, \quad 2\sigma cl = 12, \quad |\epsilon_2 + 2i\sigma cl| = 13,$$

also

$$\rho = 300, \quad \sqrt{\rho \pi} = 30;$$

alles in runden Zahlen gerechnet.

Der absoluten Entfernung $r = 1/4$ Erdquadrant entspricht also eine numerische Entfernung, die nur im Falle des Seewassers klein ist; bei allen anderen Bodenarten nimmt sie recht erhebliche Werte an.

Hiernach ist die Frage zu beurteilen, ob man die Ausbreitung der funkentelegraphischen Wellen unter der Annahme eines vollkommen leitenden Bodens, d. h. auf Grund der einfachen Formel $e^{ik_1 r}/r$ behandeln darf. Nach Gleichung (53) tritt zu dieser Formel als erstes Korrektionsglied hinzu: $-i\alpha\sqrt{\pi}$. Nur wenn sein absoluter Betrag $\sqrt{\rho \pi} \ll 1$ ist, wird jene Behandlung erlaubt sein. Aber selbst bei Seewasser fanden wir diese Größe für $r = 1/4$ Erdquadrant gleich $1/3$, so daß auch hier der Ausbreitungsmodus durch die unvollkommene Leitfähigkeit der Oberfläche erheblich modifiziert wird. Für andere Oberflächenbeschaffenheit würde das Korrektionsglied vom Betrage $\sqrt{\rho \pi}$ das erste Glied 1 in Gleichung (53) vielfach übertreffen.

Die Annahme einer vollkommen leitenden Erdoberfläche ist also für die großen Entfernungen des transatlantischen Verkehrs fallen zu lassen und die besondere Materialbeschaffenheit in Rechnung zu ziehen.

Wir fragen sodann, bis zu welchen Entfernungen jene Annahme zulässig ist. Dabei wollen wir etwa eine Ungenauigkeit von 10 Proz. für erlaubt halten derart, daß das Korrektionsglied in Gleichung (53) nicht mehr als $1/10$ des ersten Gliedes betragen soll. Wir haben dann zu verlangen $\sqrt{\rho \pi} < 1/10$ oder höchstens:

$$\frac{r}{l} = \frac{1}{1000} |\epsilon_2 + 2i\sigma cl|.$$

Die hieraus folgenden Werte von r enthält die nachstehende Tabelle und zwar in der ersten Spalte für $l = 2$ km, in der zweiten für $l = 0,36$ km:

<i>Seewasser:</i>	$r = 240$ km	$r = 8$ km
<i>Süßwasser:</i>	0,8	0,03
<i>Nasser Boden:</i>	1,2	0,04
<i>Trockener Boden:</i>	0,03	0,002

Die in den letzten Zeilen aufgeführten Zahlen sind nur Bruchteile der Wellenlänge; da so kleine Entfernung bei unserem Problem nicht in Frage kommen, dürfen wir sagen: *In den drei letzten Fällen bleibt für die Rechnung mit einer vollkommen leitenden Erde überhaupt kein Gültigkeitsbereich übrig. Nur bei Seewasser ist diese Rechnungsweise bis zu gewissen mäßigen Entfernungen hinreichend genau, nämlich bis zu 240 km bei den langen 2 km-Wellen, bis 8 km bei den Wellen von $\frac{1}{3}$ km.*

An den Ausdruck für die numerische Entfernung im Anfang dieses Paragraphen knüpfen wir noch den folgenden Schluß: Dieselbe nimmt ab mit wachsender Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit des Bodens, außerdem aber, und zwar in quadratischem Verhältnis, mit wachsender Wellenlänge. Mit abnehmender numerischer Entfernung nähern wir uns aber dem idealen Falle des vollkommenen Leiters, welcher ein Optimum für die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen bedeutet. *Deshalb ist es günstig, insbesondere für die Überwindung großer Entfernungen, mit großen Wellenlängen zu arbeiten;* die Praxis hat dies natürlich schon lange festgestellt.

Weiter wünschen wir den Ablauf der elektromagnetischen Wellen, wie ihn unsere Theorie ergibt, graphisch zur Anschaugung zu bringen. Wir knüpfen dabei am besten an die geschlossene Form (55) (oder die damit identische (47)) an und setzen der Einfachheit halber k_2^2 als rein imaginär und k_1 als klein gegen $|k_2|$, also α^2 gleich der reellen numerischen Entfernung ϱ voraus. ϱ werde als Abszisse, u und v (Gleichung (55a)) als Ordinaten aufgetragen, so daß Π_1 durch Multiplikation mit $e^{ik_1 r}/r$ aus $u - iv$ entsteht. Es ergibt sich Fig. 8.

u nimmt von dem Werte $u = 1$ bei kleinen numerischen Entfernungen, der der Annahme vollkommener Leitfähigkeit entspricht, sehr schnell ab und ist für $\varrho = 1$ fast Null. Nach Überschreitung eines negativen Minimums nähert sich u asymptotisch der Null. Die punktierte Kurve, welche von etwa $\varrho = 4$ ab vollständig mit u verschmilzt, entspricht der Darstellung (45) für Q_1 und entsteht aus dieser durch Abtrennung des Faktors $e^{ik_1 r}/r$. Natürlich darf man bei der Berechnung dieser divergenten Reihe nur bis zu derjenigen Stelle gehen, bis zu der die Glieder abnehmen, und hat die folgenden Glieder durch ein endliches Restglied ersetzt zu denken, auf dessen Ab-

schätzung indessen nicht eingegangen worden ist. Gleichung (45) zeigt, daß die asymptotische Annäherung an die Abszissenachse wie $1/\varrho$, also verhältnismäßig langsam erfolgt. Daß unsere punktierte Kurve erst bei großem ϱ ($\varrho = 4$) mit der ausgezogenen u -Kurve übereinstimmt und für kleine ϱ erheblich davon abweicht, entspricht ganz den Feststellungen des § 7 über den Gültigkeitsbereich unserer früheren Reihe für Q_1 .

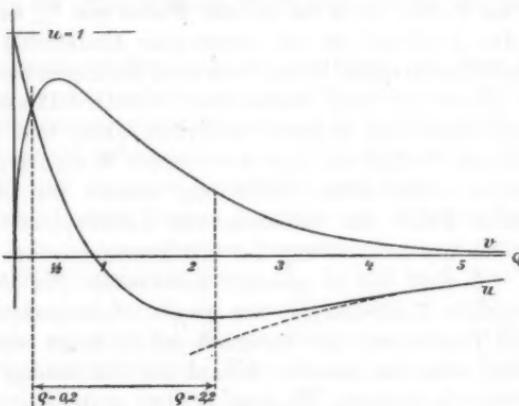


Fig. 8.

Die Kurve v andererseits beginnt bei $\varrho = 0$ mit dem Werte Null, wie es nach der Gültigkeit der Formel $e^{ik_1 r}/r$ für sehr kleine ϱ sein muß, und erreicht bei $\varrho = \frac{1}{2}$ ein Maximum. Dieses Wachstum entspricht dem Faktor $\sqrt{\varrho}$ in (55a) oder dem früher betonten Umstande, daß unsere Oberflächenwelle P mit r nur wie $r^{-\frac{1}{2}}$ abnimmt. Dagegen wird die Abnahme von v für $\varrho > \frac{1}{2}$ durch den Faktor $e^{-\varrho}$ in (55a), d. h. die mit unserer Oberflächenwelle verknüpfte radiale Dämpfung, bestimmt, welche schließlich eine schnelle (exponentielle) Annäherung an die Abszissenachse bewirkt. Trotzdem unser v nicht dem Werte von P sondern von $P/2$ entspricht, werden wir v als Bild der Oberflächenwelle, u als Bild der Raumwelle ansehen dürfen.

In der Figur ist das Gebiet $\varrho = 0,2$ bis $\varrho = 2,2$ besonders hervorgehoben, in dem $v > u$. Bezeichnen wir dieses Gebiet als dasjenige der *mittleren numerischen Entfernungen*, das Gebiet

$\varrho < 0,2$ bzw. $\varrho > 2,2$ als dasjenige der kleinen bzw. großen numerischen Entfernungen, so ergibt sich: Bei kleinen numerischen Entfernungen überwiegt die Wirkung der Raumwellen, bei mittleren die der Oberflächenwellen, bei großen wieder die der Raumwellen. Die erste dieser Aussagen entspricht ganz den Entwickelungen des vorhergehenden Paragraphen. Die zweite ist in der geringen Abnahme der Oberflächenwellen mit der Entfernung, die dritte in ihrer schließlichen exponentiellen Dämpfung begründet, die sie gegen die Raumwellen zurücktreten läßt. Ob übrigens für in diesem Sinne große numerische Entfernungen eine Zeichenübertragung überhaupt noch möglich ist, möge dahingestellt sein.

Nach dieser Einteilung würde die Marconische transatlantische Station (vgl. oben¹⁾) noch zu den kleinen Entfernungen zu zählen und in ihrer Wirkungsweise durch den Typus der Raumwellen bestimmt sein. Es ist aber zu beachten, daß unsere Berechnung von ϱ auf etwas unsicheren Annahmen über die Materialkonstanten des Seewassers beruhte, daß zwar der größte Teil der zu überbrückenden Entfernung über See liegt, daß aber auch Überlandstrecken mit wesentlich vergrößertem ϱ (in der Nähe des Senders und Empfängers) zu dem effektiven Gesamtwerte von ϱ beitragen usw. Vor allem aber spielt hier der Umstand der Erdkrümmung mit. Diese ist für die Oberflächenwellen kein Hindernis, während sie die Raumwellen abschirmt und nur durch einen Art Beugungsvorgang zum Empfänger gelangen läßt. Übrigens hängt diese Schirmwirkung nicht von der numerischen Entfernung ϱ sondern von dem Verhältnis der absoluten Entfernung zum Erdradius ab.

Durch die Erdkrümmung werden die Verhältnisse zu gunsten der Oberflächenwellen verschoben. Das Gebiet der mittleren numerischen Entfernungen, in dem der Oberflächentyp überwiegt, wird durch die Erdkrümmung sowohl nach der Seite kleiner ϱ wie namentlich nach derjenigen großer ϱ über die in Fig. 8 angegebenen Grenzen hinaus ausgedehnt werden. Es scheint nicht unwahrscheinlich, daß das schließliche Überwiegen der Raum-

1) Übrigens benutzt Marconi Wellenlängen von 3—4 km, so daß die oben mit $l = 2$ km berechnete numerische Entfernung $\varrho = \frac{1}{30}$ noch weiter zu verkleinern wäre.

wellen für große Entfernungen, wie es sich aus Fig. 8 ergeben würde, durch die Erdkrümmung vollständig illusorisch gemacht wird.

Die letzten Bemerkungen sind natürlich so lange unsicher, als keine vollständige Lösung unseres Problems für die Kugel vorliegt. Eine solche Lösung würde zeigen, daß die Grenzen für das Überwiegen der Oberflächenwellen nicht allein durch die numerische Entfernung sondern zugleich durch das Verhältnis der absoluten Entfernung zum Erdradius bestimmt werden.

§ 10. Zusammenhang mit der Theorie der Drahtwellen.
Widerstand, Kapazität und Selbstinduktion bei den ebenen
Oberflächenwellen.

Daß unsere Oberflächenwellen enge mit der Theorie der Drahtwellen zusammenhängen, geht schon daraus hervor, daß sie in der Literatur zuerst bei E. Cohn als Erläuterung zu jener auftreten (vgl. Anm. 2 zu p. 667). Im folgenden möge noch gezeigt werden, wie sich aus denjenigen Formeln, die ich früher für Drahtwellen an einem Einzeldraht entwickelt habe¹⁾, gerade unsere jetzigen Oberflächenwellen ergeben, wenn wir den Drahtradius ∞ werden lassen. Dabei handelt es sich lediglich um den *ebenen* Typus unserer Oberflächenwellen (Gleichung (27)), wie er sich in großer Entfernung ausbildet.

Wir haben zunächst die Bezeichnungen der früheren Arbeit mit der jetzigen in Einklang zu bringen. Sei a der Drahtradius (früher ρ), s die gesuchte (komplexe) Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen längs der Oberfläche des Drahtes (früher c genannt; die Lichtgeschwindigkeit war V_0), H die „Hankelsche“ Funktion (früher K) und J die gewöhnliche Besselsche Funktion, beide mit dem Index 0. Die Bezeichnungen k_1 , k_2 sind dieselben wie früher und es sei $x_1^2 = k_1^2/\mu_1$, $x_2^2 = k_2^2/\mu_2$. Benutzen wir noch aus der früheren Arbeit die Abkürzungen:

$$x_1 = \sqrt{k_1^2 - s^2} a, \quad x_2 = \sqrt{k_2^2 - s^2} a,$$

so führte die Theorie der Drahtwellen auf die folgende transzidente Gleichung²⁾ für s :

$$x_1 \frac{H(x_1)}{H'(x_1)} = \frac{x_1^2}{x_2^2} x_2 \frac{J(x_2)}{J'(x_2)}.$$

1) A. Sommerfeld, Wied. Ann. 67. p. 233. 1899.

2) Vgl. l. c. p. 252, Gleichung (20).

In der früheren Arbeit handelte es sich um zwei Fälle:

$$1. \quad |x_1| \text{ klein}, \quad |x_2| \text{ groß}.$$

Normaler Fall. Nicht zu dünner Draht bei guter Leitfähigkeit.

$$2. \quad |x_1| \text{ klein}, \quad |x_2| \text{ klein}.$$

Abnormaler Fall. Sehr dünner Draht.

Zu diesen kommt bei $a = \infty$, wo die Drahtoberfläche in unsere ebene Trennungsfläche ausartet:

$$3. \quad |x_1| \text{ groß}, \quad |x_2| \text{ groß}.$$

Dann wird aber

$$\frac{J(x_2)}{J'(x_2)} = +i \quad \text{und} \quad \frac{H(x_1)}{H'(x_1)} = -i,$$

also lautet unsere transzendente Gleichung

$$x_1 = -\frac{x_1^2}{x_2^2} x_2 \quad \text{oder} \quad x_2^2 x_1 + x_1^2 x_2 = 0.$$

In diesem dritten Falle geht also die sonst *transzendente Gleichung* in eine *algebraische* über. Die letztere sagt nichts anderes aus, als das Verschwinden des Nenners N in unserer allgemeinen Lösung des § 3 und definiert daher genau unser jetziges s .

Im Falle 1. der Drahtwellen wird gezeigt, daß sich für s ein Wert ergibt, dessen reeller Teil nahezu gleich k_1 aber etwas größer ist, was einer Fortpflanzung mit etwas weniger als Lichtgeschwindigkeit entspricht. (k_1 wird hier als reell angenommen und bedeutet ja $2\pi/\text{Wellenlänge}$.) Im Falle 2. bei abnehmendem Drahtradius wird die Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit beträchtlich, während sie im Falle 3. für $a = \infty$ verschwinden würde, wenn dieser Fall noch durch die früheren Rechnungen gedeckt würde. In Wirklichkeit tritt auch in diesem Falle eine anders geartete Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit auf, die im Falle 1. und 2. gegen die vom Drahtradius abhängige Abweichung zu vernachlässigen war, aber im *umgekehrten Sinne*. Der reelle Teil von s wird nämlich kleiner als k_1 , was einer Fortpflanzung längs der Oberfläche mit *Überlichtgeschwindigkeit* entspricht. Wir sehen dies befremdende Ergebnis und zugleich auch seine Aufklärung ein, wenn wir für den Augenblick nicht nur k_1 , sondern auch k_2 als reell voraussetzen (Glas statt Erde).

Dann ist s reell und nach Gleichung (17c) $\sqrt{s^2 - k_1^2}$ und $\sqrt{s^2 - k_2^2}$ rein imaginär. Berechnen wir also nach (27) den Winkel γ_1 , welchen die elektrische Kraftlinie im Medium 1 auf der Ebene $z = 0$ mit der Normalen zur Trennungsfläche bildet (wobei der reelle Teil der komplexen Ausdrücke für E_x und E_z zu rechnen ist), so ergibt sich einfach der zeitlich unveränderliche Wert (die Richtung des Feldes bleibt in diesem Falle konstant; Wechselfeld, nicht Drehfeld)

$$(56a) \quad \frac{E_{x1}}{E_{z1}} = \operatorname{tg} \gamma_1 = \sqrt{\frac{k_1^2 - s^2}{s^2}} = \frac{k_1}{k_2}.$$

Wir bemerken noch, daß sich in gleicher Weise für den Winkel der Kraftlinie in 2 nahe bei $z = 0$ ergibt:

$$(56b) \quad \frac{E_{x2}}{E_{z2}} = \operatorname{tg} \gamma_2 = -\sqrt{\frac{k_2^2 - s^2}{s^2}} = -\frac{k_2}{k_1}.$$

Schreibt man also $\gamma_1 = \gamma$, wie in Fig. 4, so ist $\gamma_2 = -((\pi/2) - \gamma)$, d. h. der Winkel γ findet sich auch zwischen der Trennungsfläche und der Kraftlinie in 2. Ebenso zwischen dem Energiefuß in 1, der ja auf der Kraftlinie senkrecht steht, und der Trennungsfläche, sowie zwischen dem Energiefuß in 2 und ihrer Normalen.

Auf die optische Bedeutung dieses Umstandes gehen wir im nächsten Paragraphen ein. Hier benutzen wir ihn, um s (Gleichung 17a) folgendermaßen auszudrücken:

$$(56c) \quad s = k_1 \sqrt{\frac{1}{1 + k_1^2/k_2^2}} = k_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \gamma)^{-1/2} = k_1 \cos \gamma.$$

Also ist in der Tat $s < k_1$ und die *Fortpflanzung längs der Oberfläche* $> c$. Indessen ist nicht die Oberfläche die eigentliche Fortpflanzungsrichtung, sondern die Normale zu den Kraftlinien oder der „Strahl“ \mathfrak{S} . Schreiten die Kraftlinien längs der Oberfläche um das Stück $1/s$, so schreiten sie längs \mathfrak{S}_1 um das entsprechende Stück $\cos \gamma/s$ vor (vgl. Fig. 4). Dies ist aber nach (56c) gleich $1/k_1$ und entspricht einer *Fortpflanzung der Energie in Luft mit der Geschwindigkeit* c , wie sie zu erwarten ist. Bei komplexem k_2 liegen die Verhältnisse nicht so einfach, weil hier die Winkel γ_1, γ_2 während jeder Schwingungsdauer zeitlich variieren.

Schließlich wollen wir noch in aller Kürze die Begriffe: *Widerstand*, *Kapazität* und *Selbstinduktion* auf unsere ebenen Oberflächenwellen übertragen. Dabei ist zu bemerken, daß diese Begriffe ebenso wie bei den Drahtwellen erst aus der Beschaffenheit des Feldes heraus definiert werden können, also nicht, wie bei den quasistationären Vorgängen zur Auffindung des Feldes selbst dienen können. Es kommt ihnen also hier nur eine erläuternde, sekundäre Bedeutung zu.

Wir benutzen für die drei genannten Größen R , K und L die energetische Definition und rechnen alle drei für die Flächeneinheit der Trennungsfläche. Q sei die Joulesche Wärme, die in der Zeiteinheit in einem Prisma erzeugt wird, das die Flächeneinheit zur Basis hat und sich nach der Seite von 2 ins Unendliche erstreckt. W_e bedeutet die elektrische Energie, die in einem entsprechenden Prisma enthalten ist, das aber beiderseits (nach 1 und 2) ins Unendliche reicht, ebenso W_m die magnetische Energie. Die beiden letzteren Energien kann man hiernach noch zerlegen in $W_e = W_{e1} + W_{e2}$ und $W_m = W_{m1} + W_{m2}$. Unter J verstehen wir den gesamten elektrischen Strom parallel der Trennungsfläche, also in der x -Richtung, unter ω die Ladungsdichte der Oberfläche. [] deutet das zeitliche Mittel an. Dann hat man bekanntlich die folgenden Definitionsgleichungen für R , K und L :

$$(57) \quad [Q] = R[J^2], \quad [W_e] = \frac{1}{2} \frac{[\omega^2]}{K}, \quad [W_m] = \frac{1}{2} L[J^2].$$

Bei der Ausrechnung beschränken wir uns der Kürze halber auf denjenigen Grenzfall, der z. B. bei Seewasser vorliegt, wo annähernd k_2^2 rein imaginär $= i n \mu_2 \sigma_2 / c^2$ und $|k_2^2| \gg k_1^2$ ist, welch letzteres als reell angesehen wird. Aus dem Größenverhältnis der konstanten Koeffizienten in den Gleichungen (27) oder dem damit übereinstimmenden Verlauf der Kraftlinien in Fig. 4 ergibt sich dann:

$$(58) \quad |\mathfrak{E}_{s1}| \gg |\mathfrak{E}_{x1}| = |\mathfrak{E}_{x2}| \gg |\mathfrak{E}_{z2}|,$$

wobei das Gleichheitszeichen natürlich nur für die unmittelbare Nähe der Erdoberfläche gilt.

Der Gesamtstrom in der x -Richtung ist definiert durch

$$J = \sigma_2 \int_{-\infty}^0 \mathfrak{E}_{x2} dz = \frac{i n \mu_2 \sigma_2}{c k_2^2} a \sqrt{s^2 - k_2^2} \int_{-\infty}^0 e^{i s z} + V^{s^2 - k_2^2 z} dz = c a e^{i s x}.$$

Wir multiplizieren mit e^{-int} und gehen zum reellen Teil, der Hälfte dieses und des dazu konjuguierten Ausdrückes, über (konjugierte Größen durch einen Balken angedeutet). Bei der zeitlichen Mittelbildung ergibt sich:

$$(59) \quad [J^2] = \frac{1}{2} c^2 a^2 e^{i(s-\bar{s})x}.$$

Die freie Oberflächenladung andererseits ist definiert durch die Brechung der elektrischen Kraftlinien bei $z=0$ oder formelmäßig durch

$$\begin{aligned} \omega &= \mathfrak{E}_{z1} - \mathfrak{E}_{z2} = \mathfrak{E}_{z1} \quad (\text{wegen (58)}), \\ &= \frac{n\mu_1 s}{c k_1^2} a e^{isx}. \end{aligned}$$

Multiplikation mit e^{-int} , Übergang zum reellen Teil und zeitliche Mittelbildung liefert dann:

$$(60) \quad [\omega^2] = \frac{1}{2} \frac{n^2 \mu_1^2 s \bar{s}}{c^2 k_1^4} a^2 e^{i(s-\bar{s})x}.$$

Der Widerstand R. Wir bilden

$$Q = \int_{-\infty}^0 \sigma_2 (\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_z^2) dz = \int_{-\infty}^0 \sigma_2 \mathfrak{E}_x^2 dz \quad (\text{wegen (58)})$$

und

$$[Q] = \int_{-\infty}^0 \sigma_2 [\mathfrak{E}_x^2] dz = \frac{c^2}{2\sigma_2} \frac{\sqrt{s^2 - k_2^2} \sqrt{s^2 - k_2^2}}{\sqrt{s^2 - k_2^2} + \sqrt{s^2 - k_2^2}} a^2 e^{i(s-\bar{s})x}.$$

Aus (57) und (59) folgt dann

$$R = \frac{1}{\sigma_2} \frac{\sqrt{s^2 - k_2^2} \sqrt{s^2 - k_2^2}}{\sqrt{s^2 - k_2^2} + \sqrt{s^2 - k_2^2}}.$$

Nach (25) ist wegen der vorausgesetzten Größe und Imaginärheit von k_2^2 :

$$\sqrt{s^2 - k_2^2} = \sqrt{-k_2^2} = (1-i) \sqrt{\frac{\mu_2 \sigma_2 n}{2c^2}}$$

und daher

$$(61) \quad R = \sqrt{\frac{\mu_2 n}{2c^2 \sigma_2}}.$$

Gehen wir zu den gewöhnlichen elektromagnetischen Einheiten über, so haben wir zu setzen (vgl. p. 721):

$$\sigma_2 = 4\pi c^2 \sigma, \quad R_{\text{magn.}} = 4\pi c^2 R,$$

also mit $\mu_2 = \mu$:

$$(61') R_{\text{magn.}} = \sqrt{\frac{2\pi\mu n}{\sigma}},$$

so daß jetzt $R_{\text{magn.}}$ und σ Widerstand und spezifische Leitfähigkeit im gewöhnlichen magnetischen C.G.S.-System sind.

Dies Ergebnis erinnert an den Rayleighschen Wert des Widerstandes bei Drahtwellen, nämlich

$$R'_{\text{magn.}} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu n}{2\pi\sigma}},$$

gültig für die Längeneinheit eines Drahtes vom Radius a . Bezieht man ihn auch auf die Umfangseinheit, indem man eine Widerstandsgröße $R = 2\pi a R'$ definiert, die nunmehr pro Oberflächeneinheit des Drahtes berechnet ist, so wird dieses R mit unserem R aus Gleichung (61') völlig identisch.

Zu bemerken ist, daß unser Wert (61) bei eben begrenztem, gutem Leiter allgemein gilt, der Rayleighsche bei kreiszylindrisch begrenztem nur für sehr hohe Schwingungszahl.

Für unendlich langsamem Wechselstrom ($n = 0$) wird auch $R = 0$. Der Strom würde hier einen unendlich großen Querschnitt zur Verfügung haben.

Die Kapazität K . Bei der Berechnung von W_e dürfen wir W_{e2} gegen W_{e1} und E_{z1} gegen E_{s1} vernachlässigen, beides wegen (58). Wir bilden also

$$W_e = W_{e1} = \frac{\epsilon_1}{2} \int_0^{\infty} E_z^2 dz$$

und

$$\begin{aligned} [W_e] &= \frac{\epsilon_1}{2} \int_0^{\infty} [E_z^2] dz \\ &= \frac{\epsilon_1}{4} \frac{n^2 \mu_1^2}{c^2 k_1^4} \frac{s \bar{s}}{\sqrt{s^2 - k_1^2} + \sqrt{s^2 - k_1^2}} a^2 e^{i(s - \bar{s})x}. \end{aligned}$$

Wegen (57) und (60) folgt also:

$$K = \frac{1}{\epsilon_1} (\sqrt{s^2 - k_1^2} + \sqrt{s^2 - k_1^2}).$$

Nach (25) ist aber bei großem $|k_2|$

$$\sqrt{s^2 - k_1^2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{k_1^2}{\sqrt{-k_2^2}} = (1 + i) \frac{\mu_2}{\mu_1} k_1^2 \sqrt{\frac{c^2}{2\mu_2 \sigma_2 n}}.$$

und schließlich

$$(62) \quad K = n \sqrt{\frac{2\pi \mu_2}{\sigma_2 c^3}}.$$

Für eine unendlich langsame Schwingung ($n = 0$) wäre beim *ebenen* Leiter auch $K = 0$ (die Energiemenge im Raum bei endlicher Ladung unendlich). Unsere Kapazität (62) ist also nicht statischen, sondern rein dynamischen Ursprungs. Wir vergleichen sie etwa mit der statischen Kapazität der Erde, als Kugel vom Radius a aufgefaßt. Diese ist in unseren Einheiten $4\pi a$, also auf die Einheit der Oberfläche bezogen, um sie mit (62) vergleichen zu können, $1/a = (\pi/2)10^{-6} \text{ cm}^{-1}$. Dagegen ergibt sich bei einer Wellenlänge von 2 km oder $n = 3\pi \cdot 10^6$ und bei der Leitfähigkeit von Seewasser (vgl. § 9 Anfang) nach (62) $K = (\pi/\sqrt{6})10^{-7}$. Diese elektrodynamische Kapazität ist also rund 100 mal größer als die entsprechend gemessene elektrostatische der Erdkugel. Bei schnelleren Schwingungen (kleineren Wellenlängen) wird das Verhältnis noch größer. Wir schließen daraus, daß es keinen Wert hat, bei der drahtlosen Telegraphie mit der statischen oder quasistatischen Ladungsverteilung auf der Erdkugel zu rechnen; offenbar wäre dies nur zulässig bei Schwingungen, deren Wellenlänge groß gegen den Durchmesser der Erde ist.

Selbstinduktion L. Der Vollständigkeit wegen teilen wir auch das Ergebnis der Rechnung für L mit. Als Hauptglied findet sich (W_{m2} gegen W_{m1} vernachlässigt):

$$(63) \quad L = \frac{\mu_1}{\epsilon_1 n} \sqrt{\frac{\sigma_2}{2\mu_2 n c^3}}.$$

Bei verschwindendem n liefert unsere Formel, wie es sein muß, $L = \infty$ (die magnetische Energie, die zu einem endlichen Gleichstrom gehört, wird unendlich groß).

§ 11. Zusammenhang mit der Optik.

Wir beginnen damit, die allgemeine Lösung des § 4 (Gleichung (14)) so zu schreiben, daß sie als Superposition ebener (homogener und inhomogener) Wellen aufgefaßt werden kann.

Zu dem Zwecke tragen wir für J seine Integraldarstellung ein

$$J(\lambda r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda r \cos \psi} d\psi$$

und setzen $\psi = \alpha - \varphi$, wo α eine neue Integrationsvariable und φ den Winkel im Polarkoordinatensystem r, φ, z bedeutet, der zum Aufpunkte x, y, z gehört, derart, daß $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Dann haben wir auch

$$J(\lambda r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} d\alpha.$$

Wir nehmen k_1 als reell an und zerlegen die Integration für Π_1 in (14) in zwei Teile: $0 < \lambda < k_1$ und $k_1 < \lambda < \infty$. Die entsprechenden Teile von Π_1 nennen wir Π_h und Π_i ; es erscheint nämlich Π_h als ein Aggregat homogener, Π_i als ein solches inhomogener ebener Wellen.

Für Π_h ergibt sich zunächst:

$$\Pi_h = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{k_1} \frac{x_1^2 + x_2^2}{N} e^{i\lambda(x \cos \alpha + y \sin \alpha) - \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} \lambda d\lambda.$$

Setzen wir jetzt $\lambda/k_1 = \sin \beta$, so ist β wegen $\lambda < k_1$ reell und $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} = i k_1 \cos \beta$; daher

$$(64) \quad \Pi_h = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi/2} d\beta A e^{ik_1(x \cos \alpha \sin \beta + y \sin \alpha \sin \beta - z \cos \beta)}$$

mit der Abkürzung

$$A = \frac{k_1^2}{2\pi} \frac{x_1^2 + x_2^2}{N} \sin \beta \cos \beta.$$

Der Integrand in (64) bedeutet nun in der Tat eine gewöhnliche ebene Welle, die unter dem Winkel β gegen die Normale zur Erdoberfläche einfällt und deren Einfallsebene durch das Azimut α gegeben ist. Ihre Amplitude A variiert in bestimmter Weise mit dem Einfallswinkel β . Diese Wellen sind nach dem Vorgange von Voigt als *homogen* zu bezeichnen, da für jede derselben die *Ebene konstanter Phase* zugleich eine *Ebene konstanter Amplitude* ist. Das System dieser Wellen

beginnt mit senkrechter Inzidenz ($\lambda = 0$, $\beta = 0$) und geht schließlich in streifende Inzidenz über ($\lambda = k_1$, $\beta = \pi/2$).

Betrachten wir nun den zweiten Bestandteil

$$(65) \quad II_i = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{k_1}^{\infty} \frac{x_1^2 + x_2^2}{2\pi N} e^{i\lambda(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} - V \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z \lambda d\lambda,$$

Auch in dieser Formel ist der Integrand als ebene Welle zu deuten, aber nicht mehr als gewöhnliche homogene, sondern als *inhomogene*: die Ebenen konstanter Phase sind, da jetzt $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$ reell ist,

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \text{const.},$$

stehen also auf der Erdoberfläche senkrecht, die Ebenen konstanter Amplitude werden

$$z = \text{const.},$$

sind also zur Erdoberfläche parallel. Definieren wir die „Inzidenz“ durch die Normale zu den Ebenen konstanter Phase, so kommt allen diesen inhomogenen Wellen „streifende Inzidenz“ zu, so daß sich dieses inhomogene Wellensystem stetig an das vorige homogene anschließt.

Ihr wesentliches Interesse haben die inhomogenen Wellen in der Optik für das Problem der Totalreflexion. Auch dort pflanzen sich die Wellen im optisch dünneren Medium, was ihre Phase betrifft, parallel der Trennungsfläche fort, d. h. die Ebenen konstanter Phase sind dort wie hier senkrecht auf der Trennungsfläche, die Ebenen konstanter Amplitude parallel dazu.

Unsere strenge Lösung zerlegt sich also in ein Bündel ebener Wellen vom Charakter der gewöhnlichen sichtbaren Wellen der Optik und ein Bündel inhomogener, parallel der Erdoberfläche fortschreitender vom Charakter der bei der Totalreflexion auftretenden, unter gewöhnlichen Umständen unsichtbaren Wellen.

Es liegt nahe, das erste Bündel der oberen, im Medium 1 gelegenen „Hälfte unseres leuchtenden Punktes“, das zweite Bündel der unteren, im optisch dichteren Medium 2 enthaltenen Hälfte“ zuzuschreiben. Zu dieser Ausdrucksweise wäre indessen zu bemerken, daß eine solche Trennung des im Grunde einheitlichen und untrennbaren Vorganges physikalisch nicht zu realisieren ist.

Ebenso wie in unserer vollständigen Lösung des § 3 treten in den Bestandteilen P, Q derselben (§ 4 u. ff.) inhomogene Wellen auf. Bei den ebenen Wellen (27), in die P für große Entfernung übergeht, sind z. B. die Ebenen konstanter Phase, gegeben durch

$$s_r x - \sqrt{s^2 - k_1^2} z = \text{const.},$$

von den Ebenen konstanter Amplitude, gegeben durch

$$s_i x + \sqrt{s^2 - k_1^2} z = \text{const.}$$

verschieden; hierbei meinen die Indizes r und i den reellen und imaginären Teil der betreffenden Größe und ist k_2^2 als komplex vorausgesetzt. Wie im allgemeinen bei inhomogenen Wellen wechselt auch bei unserem P die Richtung des Energieflusses mit der Zeit.

Ebenfalls zu den inhomogenen Wellen gehören unsere Wellen Q_1 im zweiten und unsere Wellen Q_2 im ersten Medium (Gleichung (35a und b)). Diese Lösungen sind sogar von allgemeinerem Charakter, als man sie in der Optik betrachtet, wegen Auftretens der Koordinate z in der Amplitude, welcher eine eigentümliche Form krummliniger Energiestrahlung mit sich bringt.

Zum Schluß bringen wir noch unsere Oberflächenwellen P , Gleichung (27), in einen interessanten Zusammenhang mit der wohlbekannten optischen *Tatsache des Polarisationswinkels und des Brewsterschen Gesetzes*. Wir werden dabei im Interesse der bequemeren Ausdrucksweise k_3 als reell ansehen (z. B. Glas statt Erde), ebenso wie im vorigen Paragraph, p. 728, an den wir anknüpfen; doch gilt Analoges auch bei komplexem Brechungsverhältnis.

Die Gleichungen (56a und b) besagten, daß der (bei reelem k_3 konstante) Winkel der elektrischen Kraftlinie gegen die Normale in 1. komplementär ist zu dem entsprechenden Winkel in 2. oder, anders ausgedrückt (vgl. Fig. 4) daß der Strahl \mathfrak{S}_1 mit der Trennungsfläche denselben Winkel γ bildet, wie der Strahl \mathfrak{S}_2 mit der Normalen zur Trennungsfläche. Nennen wir \mathfrak{S}_1 den *einfallenden*, \mathfrak{S}_2 den *gebrochenen Strahl*, so können wir uns einen *reflektierten Strahl* \mathfrak{S}_1' hinzudenken (in Fig. 4 punktiert), der denselben Winkel γ mit der Trennungsfläche bildet wie \mathfrak{S}_1 . Dieser steht nach dem Gesagten auf dem

gebrochenen Strahl \mathfrak{S}_2 senkrecht. Der Winkel $\pi/2 - \gamma$ zwischen Normale und einfallendem Strahl ist also nichts anderes als der *Polarisationswinkel* und die senkrechte Lage von \mathfrak{S}_2 und \mathfrak{S}_1 entspricht dem *Brewsterschen Gesetz*. Übereinstimmend drücken die Gleichungen (56a und b) nichts anderes als das für den Polarisationswinkel spezialisierte *Snellsche Brechungsgesetz* aus: Der Sinus des Einfallswinkels ($= \cos \gamma$) geteilt durch den Sinus des Brechungswinkels ($= \sin \gamma$) ist gleich dem Brechungsindex ($= k_3/k_1$).

Die Gleichungen (27) zeigen ferner, daß unsere einfallende (bei reelem k_3 homogene) Welle senkrecht zur Einfallsebene (Zeichenebene der Fig. 4) polarisiert ist, da die elektrische Kraft ($\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_z$) in dieser Ebene liegt. Die reflektierte Intensität ist also Null und wir verstehen auf Grund dieser elementaren Tatsachen der Optik die Möglichkeit unseres Wellenvorganges P , bestehend lediglich aus einer unter dem Polarisationswinkel einfallenden Welle in 1. und einer gebrochenen in 2.

Nicht unerwähnt möge bleiben, daß in dieser optischen Auffassung unsere „Oberflächenwelle“ P zu einem System zweier gewöhnlicher ebener Raumwellen wird, und daß die Beziehung zur Oberfläche nur noch in der Bevorzugung des Polarisationswinkels als Einfallswinkel zum Ausdruck kommt. Wir sehen hierin wiederum die Bestätigung einer in der Einleitung vorausgeschickten Bemerkung, daß schematische Einteilungen wie die Trennung in Oberflächenwellen und Raumwellen nie ohne Willkür möglich und mehr unserem Vorstellungsvermögen wie der Wirklichkeit der Dinge angepaßt sind. Physikalisch berechtigter und sicherer fundiert würde diese Trennung bei dem Problem der Kugel erfolgen können, welches also auch aus diesem Grunde in Angriff zu nehmen sein wird.

Hrn. Kollegen Zenneck danke ich für freundlichen sachkundigen Rat in den technischen Fragen des Problems.

(Eingegangen 15. Januar 1909.)

**2. Theorie der Transversalschwingungen
einer quadratischen Platte mit freien Rändern;
von Walter Ritz.**

Einleitung. — Zusammenfassung der Resultate.

Die Differentialgleichungen und Randbedingungen für die transversalen Schwingungen ebener, elastischer Platten mit *freien Rändern* sind bekanntlich zuerst in teilweise unrichtiger Form von Sophie Germain und Poisson, in definitiver Gestalt aber von Kirchhoff im Jahre 1850 gegeben worden. Angeregt wurden diese Untersuchungen durch die schönen von Chladni 1787 entdeckten Figuren, die sich bilden, wenn auf eine schwingende Glas- oder Metallplatte etwas Sand gestreut wird; später wurde die Bezeichnung Chladnischer Klangfiguren auch bei den Schwingungen von Membranen angewandt.

Die von Kirchhoff erhaltene partielle Differentialgleichung ist vierter Ordnung, und es müssen am Rande zwei Differentialausdrücke dritter und zweiter Ordnung verschwinden, die von einer Elastizitätskonstante abhängen. Die große hieraus sich ergebende Komplikation des Problems erklärt es hinreichend, daß die Lösung bis jetzt nur im Falle des Kreises (Kirchhoff) gefunden wurde, wobei sich ein sehr befriedigender Anschluß an die Erfahrung ergab.¹⁾ Die Klangfiguren bestehen hier nur aus konzentrischen Kreisen und aus Radien, mehrfache Töne sind ausgeschlossen. Die Mannigfaltigkeit der Figuren ist somit viel kleiner als in den Fällen des Dreiecks, Vierecks usw.

Im folgenden entwickle ich am Beispiel der quadratischen Platten mit freien Rändern eine neue Integrationsmethode²⁾,

1) Im Falle einer rechteckigen Platte, von der zwei gegenüberliegende Kanten *gestützt*, die beiden anderen frei sind, läßt sich, wie W. Voigt (Gött. Nachr. p. 225. 1893) gezeigt hat, die Integration elementar durchführen. Gleicher gilt von ringsum *gestützten* rechteckigen Platten.

2) Vgl. die Abhandl. des Verf.: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. Journ. f. reine u. angew. Mathematik 135. p. 1. 1908.

die ohne wesentliche Änderungen auch auf rechteckige Platten angewandt werden kann, sei es mit freien, sei es auch mit teilweise oder ganz eingespannten oder gestützten Rändern. Theoretisch ist die Lösung in ähnlicher Weise sogar für eine beliebige Gestalt der Platte möglich; eine genaue Berechnung einer größeren Anzahl von Klangfiguren, wie sie im folgenden für den klassischen Fall der quadratischen Scheibe durchgeführt ist, wird aber nur bei geeigneter Wahl der Grundfunktionen, nach welchen entwickelt wird, praktisch ausführbar. Für den Grundton, sofern große Genauigkeit nicht gefordert wird, führt das Verfahren für die meisten Platten durch den Ansatz von Polynomen zum Ziel.

Das Wesentliche der neuen Methode besteht darin, daß nicht von den Differentialgleichungen und Randbedingungen des Problems, sondern *direkt vom Prinzip der kleinsten Wirkung* ausgegangen wird, aus welchem ja durch Variation jene Gleichungen und Bedingungen gewonnen werden können. Dieses Variationsproblem wird nun durch ein gewöhnliches Maximum- und Minimumproblem für eine endliche Anzahl Parameter ersetzt, dessen Lösung elementar gelingt, womit dann eine erste Approximation gegeben ist. Dieselbe läßt sich *unbegrenzt* verbessern durch Vermehrung der Zahl der Parameter, und ergibt somit ein konvergentes Verfahren zur Integration. Daß die mathematische Form der ersten Approximationen willkürlich gewählt werden kann, ist hierbei ein wesentlicher Vorteil. Denn es ist leicht, eine experimentell bekannte Funktion durch eine genügende Anzahl Konstanten in einer geeigneten mathematischen Form beliebig genau darzustellen; unsere Methode erlaubt es nun, die Konstanten *a priori* aus der Theorie zu bestimmen, so daß die Ergebnisse der Erfahrung, in Bezug auf die angenäherte Form der gesuchten Lösung, zur praktischen Durchführung der Integration benutzt werden können. Der Umstand, daß das Prinzip der kleinsten Aktion, welches die kürzeste Zusammenfassung der Gesetze der meisten physikalischen Erscheinungen gibt, auch in vielen Fällen den direktesten Weg zu deren mathematischen Behandlung und numerischen Berechnung weist, dürfte nicht ohne Bedeutung sein.

Für die Berechnung der Schwingungen einer quadratischen

Platte mit ringsum freiem Rande führt man zweckmäßigerweise die bekannten Funktionen $u_n(x)$ ein, welche die Amplitude des n^{ten} Obertones eines freischwingenden Stabes, dessen Länge gleich ist der Quadratseite, angeben. Die Koordinatenachsen seien durch den Mittelpunkt parallel zu den Seiten des Quadrates gelegt. Aus unten zu erörternden Gründen müssen die Funktionen $u_0(x) = \text{const.}$; $u_1(x) = x \cdot \text{const.}$ eingeführt werden, die als Grundschwingungen des Stabes mit der Schwingungszahl Null aufzufassen sind; $u_2(x)$ ist also die Grundschwingung im gewöhnlichen Sinne, mit zwei Knotenpunkten; $u_m(x)$ besitzt m Knotenpunkte. Dann ergeben sich aus der Untersuchung folgende *Resultate*:

1. Sämtliche Eigentöne der Platte lassen sich bis auf einige Prozent darstellen durch die Formeln:

$$(I) \quad \begin{cases} w_{mn} = u_m(x)u_n(y) + u_m(y)u_n(x), \\ w'_{mn} = u_m(x)u_n(y) - u_m(y)u_n(x). \end{cases}$$

Den Indizes 00, 01, 10 entspricht die Schwingungszahl Null, die Platte bleibt eben.

2. Es existieren nur Doppeltöne, keine mehrfachen Töne. Die Doppeltöne entsprechen dem Falle, wo von den Indizes $m n$ der eine gerade, der andere ungerade ist. Es ergeben dann w_{mn} und w'_{mn} dieselbe Tonhöhe; jede lineare Verbindung dieser zwei Funktionen entspricht einer möglichen Lösung. Die hierbei auftretende Schar von Klangfiguren hat die Eigenschaft, daß die Kurven sämtlich durch gewisse feste Punkte, von Strehlke Pole genannt, gehen, nämlich die Wurzeln des Gleichungssystems $w_{mn}(x, y) = 0$, $w'_{mn}(x, y) = 0$. In erster Annäherung sind dies die Wurzeln von $u_m(x) = 0$, $u_m(y) = 0$, bzw. $u_n(x) = 0$, $u_n(y) = 0$; die Abstände der Pole von den Seiten sind also (bis auf 1—2 Proz) gleich den Abständen der Knoten freischwingender Stäbe von deren Enden.

3. Die Eigentöne lassen sich mit beliebiger Genauigkeit durch Summen von Ausdrücken der Form (I) darstellen mit Koeffizienten, die sich aus der Theorie bestimmen. Im folgenden ist die Rechnung bis auf $1/1000$ durchgeführt für m und n kleiner als 4. Die so berechneten Klangfiguren stimmen in sehr befriedigender Weise mit den genauen Beobachtungen

von Strehlke übercin. Die Korrekturen gegen (I) bleiben stets relativ klein.

4. Die Klangfiguren und Tonhöhen sämtlicher 35 Ober töne, für welche m und n kleiner als 7 sind, werden unten angegeben; für m und n kleiner als 4 sind sie nach den exakten Formeln berechnet, für größere Indizes nach (I), wobei jedoch der Fehler beim Maßstab der Zeichnung kaum wahrzunehmen wäre. Dies schien mir deshalb wünschenswert, weil über diese schönen Figuren durch ungenaue Beobachtung und theoretische Fehlschlüsse eine große Anzahl unrichtiger Ansichten in die Lehrbücher und Zeitschriften übergegangen ist, so daß selbst über die am leichtesten zu beobachtenden Fundamentaltöne Unsicherheit herrscht. In Chladnis Akustik erscheinen manche Eigenschwingungen als Doppeltöne, die es nur durch Inhomogenität des Materials und Mängel der Beobachtungsmethode sind. Die entsprechenden 46 Klangfiguren sind von Chladni größtenteils erhalten und, wenn auch nur in rohen Umrissen, gezeichnet worden. Da sich die zum Hervorbringen einer bestimmten Figur nötige Unterstützung der Platte aus den unten gegebenen, genauen Figuren entnehmen läßt, wird deren experimentelle Herstellung erheblich erleichtert, während bisher über das Zustandekommen irgend einer Figur, besonders bei den höheren Obertönen, im wesentlichen der Zufall entschied.

5. Die vielumstrittene Frage, ob die scheinbar geraden Linien, die in vielen Figuren auftreten, auch wirklich gerade seien, ist dahin zu beantworten, daß dies nur für die Diagonalen und Seitenhalbierenden — wo schon Symmetriegründe es erfordern — gilt. Außerdem ergeben sich aus (I) (angenähert) gerade Linien nur bei Doppeltönen und wenn $m = n$ ist. Die Resultate der Messungen Strehlkes, die vielfach angefochten wurden, stimmen hierin mit der Rechnung genau überein; die geringen Abweichungen dagegen, die Strehlke auch bei den Diagonalen und Seitenhalbierenden gefunden hat, beruhen auf einem unten zu erörternden systematischen Fehler bei der Herstellung von Sandfiguren.

6. Die Tonhöhen der 35 Obertöne stimmen mit den von Chladni gegebenen innerhalb der zu erwartenden Fehler

überein. Sie umfassen sechs Oktaven. In roher Annäherung sind die Tonhöhen gegeben durch die Formel

$$\nu = A \cdot \sqrt{m^4 + n^4 + 2(1 - \mu)m^2n^2},$$

wo m, n ganze Zahlen, A, μ Konstanten der Platte sind.

7. Die bei Membranen gültigen Sätze: „Wo eine Knotenlinie den Rand trifft, steht sie auf demselben senkrecht; schneiden sich zwei oder mehr Knotenlinien im Innern der Platte, so bilden sie gleiche Winkel miteinander“, gelten bei Platten nur ausnahmsweise oder angenähert.

8. In den Ecken ist die Lösung eine im allgemeinen *nicht analytische Funktion*, womit die Unzulänglichkeit der gewöhnlichen Methoden bei diesem Problem genügend erklärt ist. Da die Lösung jedoch innerhalb der Platte endlich und stetig bleibt, wenn sie auch nicht in eine Potenzreihe entwickelbar ist, so bleiben analytische Darstellungen durch Polynome, Fourierreihen, nach den Funktionen w_{mn} fortschreitende Reihen usw., wie sie unsere Methode bringt, dennoch möglich und praktisch anwendbar.

9. Parallelen zu den Seiten schneiden jede Figur in einer Anzahl Punkte, die *höchstens* gleich ist dem größeren der beiden Indizes m und n und *mindestens* gleich dem kleineren. Andere, analoge Gesetze gestatten es, zu einer gegebenen Klangfigur die entsprechende Formel zu finden. Sind z. B. beide Diagonalen Knotenlinien, so hat man es mit w'_{mn} zu tun, wobei m, n beide gerade oder ungerade sind. Ist nur eine Diagonale vorhanden, so liegt wieder w'_{mn} mit m und n von ungleicher Parität (Doppelton) vor. Gehören die Seitenhalbierenden zur Figur, so ist einer oder beide Indizes ungerade usw.

10. Schließlich wird die Methode, unter Anwendung von Polynomen, auf die schon von Kirchhoff berechnete Grundschwingung eines Kreises angewendet. Formeln mit zwei Konstanten genügen, um die Schwingungszahl desselben auf $\frac{1}{2}$ Proz. zu erhalten, d. h. mit derjenigen Genauigkeit, die für solche Versuche überhaupt in Betracht kommt. Der Rechenaufwand ist viel geringer wie bei der Kirchhoffschen Methode, und sämtliche Operationen durchaus elementar. In der oben zitierten Arbeit habe ich auch die Anwendbarkeit der Methode

auf die Schwingungen von Saiten, unter Benutzung von Polynomen zur angenäherten Darstellung der Lösung, untersucht: bei Benutzung von nur drei Gliedern ergibt sich der Fundamentalton der Saite auf drei Milliardstel genau.

Die empirischen Formeln.

Nach diesen Ergebnissen der Theorie läßt sich leicht übersehen, in welchem Umfange und warum gewisse empirische Formeln, die zur Darstellung der Klangfiguren in mehr oder weniger roher Annäherung herangezogen worden sind, ihren Zweck erreichen. Es ist dabei zu berücksichtigen, daß, wie unten gezeigt wird, $u_m(x)$ durch einen \cos bzw. einen \sin angenähert darstellbar ist, ausgenommen in der Nähe des Randes. Ist die Quadratseite gleich 2, so sind, bis auf willkürliche Faktoren, die Lösungen:

$$u_{2m} = \cos(m - \frac{1}{4})\pi x; \quad u_{2m+1} = \sin(m + \frac{1}{4})\pi x.$$

Ersetzt man dies noch durch $\cos m\pi x$ und $\sin(m + \frac{1}{2})\pi x$, so hat man die Funktionen, aus welchen durch Superposition Wheatstone¹⁾ die Klangfiguren ableiten wollte, wobei geradlinig begrenzte Figuren sich ergaben. Solche Lösungen entsprechen, roh angenähert, den Gleichungen (I) für m oder n gleich Null. Der Umstand, daß nur den Ausdrücken

$$\cos \pi x - \cos \pi y, \quad \cos \pi x + \cos \pi y$$

beobachtete Figuren ungefähr entsprechen, nicht aber $\cos \pi x$, $\cos \pi y$ einzeln, wie es nach diesem Superpositionsprinzip sein sollte, läßt genügend erkennen, daß es sich hier nur um einen in besonderen Fällen anwendbaren Kunstgriff handelt. Um so merkwürdiger ist es, daß auf Grund dieses unhaltbaren Prinzips bis in die neueste Zeit die exakten Versuche Strehlkes von experimenteller und theoretischer Seite her als ganz unrichtig bezeichnet wurden. Insbesondere glaubt R. König²⁾ aus ganz unzulänglichen experimentellen Ergebnissen die Geradlinigkeit der den Seiten paralleler Knotenlinien behaupten zu können, wie es das Superpositionsprinzip verlangt. Indem er die Grundgleichung für einen solchen durch geradlinige Knoten-

1) Ch. Wheatstone, Phil. Trans. 1833. Vgl. Lord Rayleigh, Sound § 227.

2) R. König (Paris), Pogg. Ann. 122. p. 238. 1864.

linien begrenzten Bereich (also mit der Randbedingung: Verschiebung gleich 0) integriert, glaubt S. Tanaka¹⁾ allgemeinere und strengere Formeln zu erhalten. Dies ist aber schon deswegen nicht der Fall, weil übersehen ist, daß eine Randbedingung die Lösung gar nicht bestimmt, so daß Hr. Tanaka aus der unendlichen Reihe möglicher Lösungen eine *unrichtige* herausgewählt hat, wie es die Wahrscheinlichkeit ja verlangt, hätte er statt Produkten von cos und sin, Produkte der Form $u_m(x)u_n(y)$ angesetzt, so hätte die Lösung eine wesentlich höhere Approximation dargestellt (wenigstens bei Doppeltönen und für $m = n$).

In seiner Theory of Sound, § 226 ff., hat Lord Rayleigh die Wheatstonesche Untersuchung weitergeführt. Er geht aus von der Bemerkung, daß, wenn das Verhältnis μ der Querkontraktion zur Längsdilatation gleich Null ist (was allerdings bei keinem bekannten Körper zutrifft), partikuläre Lösungen des Problems existieren, die von einer Koordinate unabhängig sind, und einfach den Schwingungen elastischer Stäbe von gleicher Länge wie die Quadratseite entsprechen, also den Funktionen $u_m(x)$. Dabei ergeben $u_m(x)$ und $u_m(y)$ natürlich dieselbe Tonhöhe; sie können zu den Ausdrücken

$$u_m(x) + u_m(y); \quad u_m(x) - u_m(y)$$

verbunden werden, welche in der Tat eine Reihe von Klangfiguren auf 1—2 Proz. genau darstellen. Allerdings ist die Forderung der Theorie, daß diese zwei Schwingungen gleiche Tonhöhe haben sollten, tatsächlich *nicht* erfüllt, und es existieren die einzelnen Schwingungen $u_m(x)$, bzw. $u_m(y)$, nur im irrealisierbaren Falle $\mu = 0$. In Wirklichkeit liegt hier jener Spezialfall der Formeln (I) vor, wo der eine Index gleich Null ist. Der Grundton der Platte ($m = n = 1$) wird hierdurch nicht dargestellt. Lord Rayleigh setzt dafür den angenäherten Ausdruck xy , der in der Tat mit (I) übereinstimmt, und, wie sich zeigen wird, von der richtigen Lösung nur wenig abweicht.

Das Variationsproblem und die Grundgleichungen.

Sei, wie oben, μ das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation, welches nach Poisson $1/4$, nach Wertheim $1/3$

1) S. Tanaka, Wied. Ann. 32. p. 670. 1887.

sein soll, und jedenfalls zwischen 0 und 1 liegt; sei ferner E der Elastizitätsmodul¹⁾, $2h$ die Dicke der Platte, dann ist nach Kirchhoff die potentielle Energie der Platte, vorausgesetzt, daß die Verschiebung $u(xy)$ senkrecht zur Ebene der Platte klein bleibe:

$$(1) \quad \left\{ W = \frac{Eh^3}{3(1-\mu^2)} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy. \right.$$

Die kinetische Energie wird, wenn ϱ die Dichte bedeutet,

$$(2) \quad \varrho h \iint \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dy,$$

woraus sich durch Anwendung des Hamiltonschen Prinzips ergibt

$$\varrho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{Eh^3}{3(1-\mu^2)} \Delta \Delta u = 0, \quad (\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}).$$

Hat man es mit Eigenschwingungen zu tun, so ist

$$u = \sin 2\pi\nu(t - t_0) w(x, y)$$

zu setzen; dann ergibt sich die Differentialgleichung

$$(3) \quad \Delta \Delta w = \lambda w,$$

wo

$$(4) \quad \lambda = \frac{12\pi^2\nu^2(1-\mu^2)\varrho}{Eh^2}.$$

λ wird durch die Integration bestimmt; die Gleichung (4) ergibt dann die Anzahl Schwingungen pro Sekunde ν . Die Randbedingungen selbst findet man durch die Variation von w . Den Faktor $\sin 2\pi\nu(t - t_0)$ kann man natürlich abwerfen, und erhält für eine Seite des Quadrats senkrecht zur x -Achse

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

und ähnlich für die Seiten senkrecht zur y -Achse, durch Vertauschung von x und y .

Bei den hierbei nötigen Umformungen und partiellen Integrationen längs des Randes tritt an den Ecken desselben, wie

1) In Kirchhoffs Bezeichnung ist $\mu = \frac{\theta}{1+2\theta}$, $E = 2K \frac{1+3\theta}{1+\theta}$.

H. Lamb¹⁾ zuerst bemerkt hat, ein Glied der Form $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta w$ auf, aus welchem die weitere von Kirchhoff nicht bemerkte Bedingung sich ergibt

$$(6) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \text{ in den Ecken.}$$

Der Stabilität der Platte entspricht es, daß der Integrand von (1) eine stets positive Form ist.²⁾

Ähnlich wie bei den Schwingungen von Membranen lassen sich diese Gleichungen ohne weiteres zu der Forderung zusammenfassen, es soll das Integral

$$(7) \quad \left\{ J = \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \right.$$

unter der Bedingung

$$(8) \quad \iint w^2 dx dy = a = \text{gegebene Größe}$$

möglichst klein werden. Denn nach bekannten Sätzen der Variationsrechnung hat man letzteres Integral, mit einem konstanten Faktor $-\lambda$ multipliziert, zu (7) zu addieren, und nunmehr bei willkürlichen δw zu variieren, woraus sich ohne weiteres die Gleichungen (3), (5) und (6) ergeben. Aus dem Verschwinden der ersten Variation

$$(9) \quad \iint \left\{ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dots - 2 \lambda w \delta w \right\} dx dy = 0$$

folgt, wenn man insbesondere $\delta w = \varepsilon w$ setzt, wo ε ein unendlich kleiner konstanter Faktor ist, die Gleichung

$$\iint \left\{ 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \dots - 2 \lambda w^2 \right\} dx dy = 0 \text{ für } w = \text{gesuchte Lösung,}$$

1) H. Lamb, Lond. Math. Soc. Proc. 21. p. 70. 1890.

2) Nämlich als Funktion von

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = u \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = v$$

betrachtet; die Diskriminante der Form $u^2 + v^2 + 2\mu uv$ ist gleich $4(1-\mu)$ und somit positiv für $\mu < 1$.

also

$$(10) \quad \lambda = \frac{\text{Minim. von } J}{a} = \frac{J(w)}{a}$$

ganz ähnlich wie bei den Membranen.¹⁾

Ein wirkliches Minimum liegt nur vor beim Grundton w_0 , welcher dem kleinsten Wert von λ entspricht. Will man für den nächsten Oberton w_1 , dem der Wert λ_1 entsprechen möge, ein wirkliches Minimum erhalten, so hat man die weitere Bedingung

$$(11) \quad \iint w_0 w_1 dx dy = 0$$

hinzuzufügen. Man hat dann zum Integranden von (9) noch ein Glied $\lambda' w_0 \delta w_1$ zu addieren; für $\delta w_1 = \varepsilon w_1$ verschwindet dasselbe nach Voraussetzung, und es bleibt wieder die Gleichung (10), diesmal für λ_1 gültig.²⁾

Der Ansatz $\delta w_1 = \varepsilon w_0$ ergibt für λ' den Wert

$$\lambda' = - \iint \left\{ 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \dots \right\} dx dy$$

und dieser Ausdruck ist gleich Null. Dies folgt aus der Variationsgleichung (9) für w_0 , wenn $\delta w = \varepsilon w_1$, $w = w_0$ gesetzt wird und (11) berücksichtigt wird. Die Gleichungen (3), (5), (6) bleiben also ungeändert.

Für den Oberton w_n gelten ebenso die „Orthogonalitätsbedingungen“

$$\begin{aligned} \iint w_n^2 dx dy &= a, \quad \iint w_n w_0 dx dy = 0, \\ \iint w_n w_1 dx dy &= 0 \dots, \quad \iint w_n w_{n-1} dx dy = 0, \end{aligned}$$

wobei, falls mehrfache Töne vorliegen, jede der linear unabhängigen Schwingungen w_i , die zu dem Ton gehören, zu berücksichtigen sind. Für irgend zwei Schwingungen w_m , w_n , die zu verschiedenen λ gehören, gilt also die Orthogonalitätsbedingung:

$$\iint w_m w_n dx dy = 0.$$

1) Vgl. z. B. Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der Physik II. § 116ff. Braunschweig 1901.

2) Vgl. Lord Rayleigh, Theory of Sound, § 217.

Die Minimumsforderung (7) und (8), mit der wir es im folgenden zu tun haben werden, ist ersichtlich nur eine abgeänderte Form des Hamiltonschen Prinzips.

Die Integrationsmethode.

Die neue Methode zur Lösung von Variationsproblemen, die wir nun anwenden wollen, geht aus von folgendem *Interpolationsproblem*:

Seien $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y) \dots \psi_n(x, y) \dots$ eine Reihe von Funktionen, die wir (was hier zu selbstverständlich ist, um betont zu werden) als stetig (nebst den 1., 2., 3. und 4. Differentialquotienten) innerhalb der Platte annehmen. Wir bilden den Ausdruck:

$$(12) \quad w_n = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \dots + a_n \psi_n$$

und fordern, es sollen die a_n so bestimmt werden bei gegebenem n , daß w_n möglichst wenig von einer der gesuchten Funktionen w , die das System (3), (5), (6) befriedigen, innerhalb der Platte abweiche. Wäre w numerisch gegeben, so läge hier ein gewöhnliches Interpolationsproblem vor.

Dasselbe ist insofern unbestimmt, als man eine „möglichst gute Annäherung“ in verschiedenem Sinne auffassen kann. Eine genaue Definition des „Gesamtfehlers“, welcher möglichst klein werden soll, ist daher nötig.

Es liegt nahe, als Maßstab des Gesamtfehlers die Abweichung der potentiellen Energie von ihrem exakten Wert beim wirklichen Vorgang zu wählen; dies kommt aber auf die Forderung hinaus: es sind die a_i so zu wählen, daß der Ausdruck

$$(13) \quad \left\{ J_n(a_1 \dots a_n) = \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \right.$$

unter der Bedingung

$$(14) \quad U_n = \iint w_n^2 dx dy = a$$

möglichst klein werde. Da aber J_n eine quadratische Funktion der a_i ist, so liegt hier ein gewöhnliches Maximum- und Mini-

mumproblem vor, welches, unter Einführung eines Faktors λ_n , durch das System homogener linearer Gleichungen gelöst wird

$$(15) \quad \frac{\partial J_n}{\partial a_1} - \lambda_n \frac{\partial U_n}{\partial a_1} = 0 \dots, \quad \frac{\partial J_n}{\partial a_n} - \lambda_n \frac{\partial U_n}{\partial a_n} = 0.$$

Mit anderen Worten: es ist der Ausdruck (12) an Stelle der unbekannten Funktion w im Variationsproblem einzusetzen, und die a_i so zu wählen, daß das Integral möglichst klein werde. Gleicher gilt allgemeiner für jeden Vorgang, der durch das Hamiltonsche Prinzip gegeben ist, ja für die Lösung beliebiger Variationsprobleme, vorausgesetzt, daß sie gewissen, hier nicht zu erörternden Bedingungen genügen.

Unter Einführung der (bekannten) Konstanten

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_{nm} = \alpha_{mn} &= \iint \left\{ \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2} \right. \\ &\quad \left. + \mu \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x \partial y} \right\} dx dy \end{aligned} \right.$$

$$(17) \quad \beta_{nm} = \beta_{mn} = \iint \psi_m \psi_n dx dy$$

läßt sich (15) schreiben:

$$(18) \quad \sum_{p=1}^n (\alpha_{pq} - \lambda_n \beta_{pq}) a_p = 0 \quad \text{für } q = 1, 2 \dots n.$$

Die Determinante dieses Systems von n homogenen, linearen Gleichungen für die a_i muß verschwinden, woraus sich λ_n als eine der Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades ergibt, und die a_i bis auf einen zunächst willkürlichen, nachher aus (14) zu bestimmenden Faktor bestimmt werden. Jeder Wurzel $\lambda_n^{(i)}$ entspricht ein System der a_i . Bei einer nächst höheren Approximation w_{n+1} sind die a_i neu zu bestimmen.

Es zeigt sich nun, daß, wenn man die ψ_i geeignet wählt, der so erhaltene Ausdruck (12) in der Tat eine Annäherung an die gesuchte Lösung darstellt, welche mit wachsendem n sich unbegrenzt verbessert, so daß sich ein konvergentes Verfahren ergibt.

Wir betrachten zunächst den Grundton, und wählen dementsprechend bei jeder Approximation die kleinste der Wurzeln der Determinantengleichung. Bezeichnen wir mit $d'w_n$ das totale Differential von w_n in bezug auf die a_i

$$d'w_n = \psi_1 da_1 + \psi_2 da_2 + \dots \psi_n da_n,$$

so muß $d' J_n - \lambda_n d' U_n = 0$ sein, d. h.

$$(19) \quad \iint \left\{ \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} d' \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + \dots - \lambda_n w_n d' w_n \right\} dx dy = 0.$$

Hier sind aber genau dieselben Schlüsse möglich, wie wir sie im vorigen Paragraphen für die Variation gemacht haben; es ist nur w durch w_n , λ durch λ_n , d durch d' zu ersetzen. Wieder ist λ_n der kleinste Wert von J_n/a , und wenn n wächst, nimmt dieser kleinste Wert fortwährend ab, oder wenigstens niemals zu. Da nun aber J und J_n , wie oben bemerkt, positiv sind, so haben die λ_n eine untere Grenze λ , der sie beliebig nahe kommen. *Soll nun diese Grenze mit dem λ des Grundtones zusammenfallen, so müssen wir offenbar die ψ_i so wählen, daß durch einen Ausdruck der Form $A_1 \psi_1 + \dots + A_n \psi_n$ jede beliebige, den Stetigkeitsbedingungen genügende Funktion w , nebst ihren Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung, innerhalb der Platte beliebig genau darstellbar sei; eine Forderung, die durch Polynome, Fourierreihen usw. befriedigt wird.* Dann kann $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$ von dem kleinsten Wert von J/a für beliebige w nicht verschieden sein, und wir erhalten eine Reihe von Funktionen w_1, w_2, w_3, \dots für die J gegen seinen Grenzwert konvergiert. Daraus folgt nach den Untersuchungen von D. Hilbert¹⁾ und B. Levi²⁾, daß die w_i gegen die gesuchte Grenzfunktion konvergieren, von gewissen Punkten vielleicht abgesehen, die hier ohne Interesse sind.³⁾

Nimmt man statt der ersten, stets die zweite Wurzel der Determinantengleichungen, so gelangt man zum ersten Oberton usw.

Die Randbedingungen (5) und (6) sind um so genauer erfüllt, je näher λ_n seinem Grenzwert liegt. Gleiches gilt von

1) D. Hilbert, Math. Annalen 59. 1902.

2) B. Levi, Rendiconti del circ. math. di Palermo 22. 1906.

3) Diese Punkte können überall dicht liegen, aber nur so, daß sie bei einer Integration der Funktion über jedes beliebige Bereich ohne Einfluß bleiben. Bei den Fourierreihen und anderen für die ψ_i in Betracht kommenden interpolatorischen Funktionen sind die Koeffizienten aber durch Integrale gegeben, auf welche die singulären Stellen somit ohne Einfluß bleiben; die Reihen nehmen daher in solchen Stellen den aus der Stetigkeit folgenden Wert an, d. h. Funktionen mit solchen Singularitäten sind als Grenzwerte ausgeschlossen.

der Differentialgleichung. Dabei ist jedoch zu bemerken, daß die Entwickelungen nach Polynomen, Fourierreihen usw. stets nur eine bestimmte Anzahl gliedweiser Differentiationen zulassen, so daß — wie auch wirklich der Fall ist für die unten zu betrachtenden Entwickelungen nach den $u_m(x) u_n(y)$ — sie möglicherweise gar nicht drei- und viermal gliedweise differentiierbar sind, und daher durch Einsetzen in (3) und (5) *nicht verifiziert* werden können. Es ist eine allgemeine Eigentümlichkeit interpolatorischer Funktionen, daß sie um die darzustellende Funktion hin- und herschwanken, und ihre sukzessiven Differentialquotienten bei gegebener Gliederzahl eine immer schlechter werdende Approximation geben, die bald ganz unbrauchbar wird — was dann der Divergenz der Reihen entspricht. So stellt der Ansatz I, p. 739 zwar die Amplituden ω , nicht aber deren zweite Differentialquotienten befriedigend dar.

Entwickelungen nach Polynomen genügen stets den gestellten Anforderungen; man kann *also bei jeder Form der Platte* für ψ_i den Ausdruck $x^m y^n$ setzen. Denn da jede beliebige Funktion durch Polynome stets beliebig angenähert darstellbar ist, so gilt dies insbesondere für den zweiten Differentialquotienten einer gegebenen Funktion $f(x)$; es ist, wenn nur $d^2 f / d x^2$ den sogenannten Dirichletschen Bedingungen genügt,

$$\frac{d^2 f}{d x^2} = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n + \varepsilon_n(x),$$

wo $|\varepsilon_n|$ kleiner als jede beliebige Zahl gemacht werden kann für genügend große n . Somit folgt

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{a_0 x^2}{2} + \dots + \frac{a_n x^{n+2}}{n \cdot (n+1)} + y_n(x),$$

wo von y_n gleiches wie von ε_n gilt; hier haben wir also einen angenäherteren Polynomalausdruck von $f(x)$, der zweimal differentiierbar ist. Ob er es auch dreimal ist, hängt von der Natur von f''' , aber auch vom gewählten Interpolationsmodus ab. Dies läßt sich ohne weiteres auf Funktionen mehrerer Variablen ausdehnen.

Ob und wie oft Fourierreihen differentiierbar sind, hängt von analogen Umständen ab, wie sie unten bei den Entwickelungen nach den $u_m(x), u_n(y)$ zu besprechen sein werden.

Ist die Variation δw selbst gewissen Bedingungen unterworfen (was bei eingespannten Platten der Fall ist, wo am Rande

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0; \quad \delta w = 0, \quad \frac{\partial \delta w}{\partial n} = 0$$

sein muß), so müssen alle ψ_i diese Bedingungen erfüllen. Diesen Fall habe ich in der eingangs zitierten Arbeit eingehend besprochen.

Dab die vorliegende Methode auch auf viele andere Probleme, insbesondere auf Gleichgewichtsprobleme, die ja stets aus einer Minimumsforderung ableitbar sind, angewendet werden kann, braucht kaum erwähnt zu werden. Es ist nun zu zeigen, daß sie auch wirklich, bei geeigneter Wahl der ψ_i , numerisch brauchbar ist.

Entwickelungen nach den Eigenschwingungen von Stäben mit freien Enden.

Die Amplitude $u(x)$ eines an beiden Enden freien Stabes genügt bekanntlich¹⁾ der Gleichung

$$(20) \quad \frac{d^4 u}{dx^4} = k^4 u,$$

und an beiden Enden den Bedingungen

$$(21) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 u}{dx^3} = 0,$$

woraus sich u als eine Summe trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen ergibt, während k Wurzel einer bekannten transzendenten Gleichung ist. Jeder Wurzel k_m derselben entspricht ein Eigenwert $u_m(x)$, und es gilt die *Orthogonalitätsbedingung*

$$(22) \quad \int u_m u_n dx = 0 \text{ für } m \neq n,$$

das Integral über die Länge des Stabes erstreckt. Um die Symmetrieverhältnisse gehörig hervortreten zu lassen, wähle man als Anfangspunkt $x = 0$, die Mitte des Stabes; ferner bestimme man den willkürlichen, konstanten Faktor, mit dem

1) Zur Theorie der Schwingungen freier Stäbe vgl. man z. B. Lord Rayleigh, Sound § 160ff.

jede Lösung noch multipliziert werden kann, durch die Bedingung

$$(23) \quad \int u_m^2 dx = 1,$$

und setze endlich der Einfachheit halber als Längeneinheit die halbe Stablänge an, so daß $x = \pm 1$ die Koordinaten der Endpunkte sind. Dann ergeben sich für die u_m , wie man leicht findet, die Ausdrücke:

Für gerade m:

$$(24) \quad u_m = \frac{\text{Cos } k_m \cos k_m x + \sin k_m \text{Cos } k_m x}{\sqrt{\text{Cos}^2 k_m + \sin^2 k_m}},$$

wobei $\text{tg } k_m + \text{Tg } k_m = 0$.

Für ungerade m:

$$(25) \quad u_m = \frac{\text{Sin } k_m \sin k_m x + \cos k_m \text{Sin } k_m x}{\sqrt{\text{Sin}^2 k_m - \cos^2 k_m}},$$

wobei $\text{tg } k_m - \text{Tg } k_m = 0$.

Beide Gleichungen lassen die Wurzel $k=0$ als erste zu; in der Tat erfüllen auch die Funktionen

$$(26) \quad u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{const.}, \quad k_0 = 0,$$

$$(27) \quad u_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \quad k_1 = 0$$

alle Bedingungen (20) bis (23), und sind als Eigenschwingungen mit der Schwingungszahl Null einzuführen, bei welchen der Stab geradlinig bleibt. Die Notwendigkeit dieser Einführung wird sich unten zeigen.

Bei dieser Festsetzung entspricht $m=2$ dem gewöhnlichen Grundton mit zwei Knotenpunkten; allgemein gibt jedesmal der Index m die Anzahl der Knotenpunkte der entsprechenden Schwingung an. Die Schwingung ist eine gerade Funktion von x für gerade m , eine ungerade für ungerade m .

Die Wurzeln $k_3, k_4, k_5 \dots$ von $\text{tg } k_m + \text{Tg } k_m = 0$ unterscheiden sich wenig von $m\pi/2 - \pi/4$; es ist $k_3 = 2,3650$; k_4 ist von $(2 - \frac{1}{4})\pi$ nur in der 6^{ten} Stelle verschieden, k_5 noch weniger von $(3 - \frac{1}{4})\pi$.

Die Wurzeln $k_3, k_5, k_7 \dots$ von $\text{tg } k_m - \text{Tg } k_m = 0$ sind

$$k_3 = 3,92660; \quad k_5 = (2 + \frac{1}{4})\pi; \quad k_7 = (3 + \frac{1}{4})\pi \dots$$

Allgemein ist für $m > 2$ auf fünf Stellen genau

$$(27a) \quad k_m = \left(m - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2}.$$

Für $m > 2$ ist auf vier Stellen genau

$$(28) \quad u_m(x) = \cos \left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4} \right) \pi x + \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \operatorname{Cof} \left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4} \right) \pi x}{\sqrt{2} \operatorname{Cof} \left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4} \right) \pi}$$

für gerade m , und

$$(29) \quad u_m(x) = \sin \left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4} \right) \pi x + \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{Sin} \left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4} \right) \pi x}{\sqrt{2} \operatorname{Sin} \left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4} \right) \pi}$$

für ungerade m .

Die hyperbolischen Teile sind für kleine x um so kleiner, als m größer ist; für qualitative Betrachtungen kommen sie nur in der Nähe der Endpunkte in Betracht, und es reduzieren sich die u_m auf

$$\cos \left(m - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{2} \quad \text{und} \quad \sin \left(m - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{2}.$$

Infolge von (22) und (23) lassen sich, wie bekannt, die Koeffizienten einer Entwicklung

$$(30) \quad f(x) = A_0 u_0 + A_1 u_1 + \dots + A_m u_m(x) + \dots$$

durch Multiplikation mit u_m und Integration, wie bei den Fourierreihen, bestimmen; es ist

$$(31) \quad A_m = \int_{-1}^{+1} f(x) u_m(x) dx.$$

Schreibt man dies

$$A_m = \frac{1}{k_m^4} \int_{-1}^{+1} f(x) \frac{d^4 u_m}{dx^4} dx$$

und integriert partiell, so wird, da

$$\frac{d^3 u_m}{dx^3} \quad \text{und} \quad \frac{d^3 u_m}{dx^3} \quad \text{für } x = \pm 1$$

verschwinden,

$$(32) \quad A_m = \frac{1}{k_m^4} \int_{-1}^{+1} f''(x) u_m'' dx,$$

und weiter

$$A_m = \frac{1}{k_m^4} \left[f'' \frac{du_m}{dx} \right]_{-1}^{+1} - \frac{1}{k_m^4} \int_{-1}^{+1} f''' \frac{du_m}{dx} dx.$$

Da $\frac{1}{k_m} \frac{du_m}{dx}$ mit 1 vergleichbar bleibt für jedes m , und f'', f''' endlich und stetig sein sollen, so ergibt sich, daß für beliebige m , $A_m k_m^8$ unter einer festen Zahl bleibt; oder, da $k_m = (m - \frac{1}{2})\pi/2$, daß die A_m wie $1/m^3$ abnehmen. Die Reihe (30) konvergiert also absolut und gleichmäßig, nebst ihrer ersten, gliedweise genommenen Ableitung. Die zweite Ableitung konvergiert nur noch wie $1/m$. Da (Lord Rayleigh, l. c.) die u_m die Eigenfunktionen von an beiden Enden eingespannten Stäben sind, so entspricht die Formel

$$f''(x) = A_0 u_0'' + A_1 u_1'' + \dots + A_m u_m''(x) + \dots$$

der Entwicklung nach solchen Eigenfunktionen, wie sich auch aus dem Ausdruck (32) der A_i ergibt. Daß diese Entwicklung, wenn auch nicht absolut, so doch in der Art einer Fourierreihe konvergiere, darf wohl vorausgesetzt werden. Daraus folgt dann die zweimalige gliedweise Differentierbarkeit der Reihe (30).

Nun sind aber die Formeln (31) und die folgenden Betrachtungen ebensogut anwendbar, wenn man einige der u_i wegläßt; soll die Reihe gegen $f(x)$ und nicht gegen eine andere Funktion konvergieren, so ist es wichtig festzustellen, daß das Orthogonalsystem der u_i ein vollständiges ist, d. h. daß nicht etwa weitere Funktionen U_i existieren, die den Bedingungen

$$\int_{-1}^{+1} U_m u_n dx = 0, \quad \int_{-1}^{+1} U_m U_n dx = 0 \quad \text{für } m \neq n$$

genügen. Daß die gewöhnlich nicht betrachteten Funktionen $u = \text{const.}$, $u = x \cdot \text{const.}$ hierher gehören, ist schon bemerkt worden, und wir haben sie als u_0 und u_1 bereits eingeführt. Ohne diese Einführung aber konvergiert $\sum A_i u_i(x)$ gar nicht gegen $f(x)$, sondern gegen

$$f(x) - A_0 u_0 - A_1 u_1 = f(x) - \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{\sqrt{2}} dt - x \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{3}{2}} f(t) t dt.$$

Dies scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein¹⁾; da der Ausdruck xy nahezu dem Grundton einer quadratischen Platte entspricht, erkennt man wie praktisch wichtig diese Einführung ist.

Daß damit aber die u_i wirklich zu einem vollständigen Orthogonalsystem ergänzt sind, läßt sich nach einer Methode von Liouville zeigen, und ist in letzter Instanz darauf zurückzuführen, daß nun jeder Ausdruck²⁾

$$(33) \quad A_0 u_0 + A_1 u_1 + \dots + A_m u_m$$

höchstens m Wurzeln besitzt, über die man offenbar willkürlich verfügen kann, durch geeignete Wahl des A_i ; dies war vor der Adjunktion von u_0, u_1 (mit keiner bzw. einer Wurzel) nicht der Fall; bei den Entwickelungen nach den Eigenfunktionen eingespannter Stäbe ist keine Adjunktion notwendig (und möglich), weil der Grundton im Innern *keine* Wurzel, der erste Oberton nur eine usw. hat.

In einem analogen Fall bemerkt nun Liouville, daß, wenn man $f(x)$ durch (33) darstellen will und der Methode der kleinsten Quadrate entsprechend die A_i so wählt, daß das Integral des Fehlerquadrates

$$(34) \quad \int_{-1}^{+1} [f(x) - A_0 u_0 - A_1 u_1 - \dots]^2 dx$$

ein Minimum wird, man für die A_i eben die Formel (31) erhält. Ist $[a_0 u_0 + a_1 u_1 + \dots + a_m u_m] \varepsilon$ das totale Differential von (33) nach den A_i ($\varepsilon =$ unendlich klein, die a_i willkürliche Zahlen), so ergibt die Forderung des Minimums:

$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - A_0 u_0 - A_1 u_1 - \dots - A_m u_m] [a_0 u_0 + a_1 u_1 + \dots + a_m u_m] dx = 0$$

für beliebige a_i . Daraus folgt, daß $f(x)$ durch $A_0 u_0 + \dots$ mindestens $m + 1$ mal geschnitten wird, sonst könnte man über die Wurzeln von $a_0 u_0 + \dots$ so verfügen, daß sie mit den Wurzeln des ersten Ausdruckes zusammenfallen, und das

1) Insbesondere nicht von Lord Rayleigh, Sound, Art. 168.

2) Der Beweis dieses Satzes von Sturm läßt sich genau wie bei Riemann-Weber, Part.-Differentialgl. II. p. 69 führen.

Integral wäre positiv und nicht = 0. (Mehrfache Wurzeln sind als Grenzfälle zu betrachten.) Läßt man nun m unbeschränkt wachsen, so schneidet $A_0 u_0 + \dots A_m u_m$ die Funktion $f(x)$ in einer unbeschränkt wachsenden Zahl von Punkten; die angenäherte Funktion *oszilliert* um die exakte hin und her. Schließlich verwandelt sich $A_0 u_0 + \dots$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe, und $f(x) - A_0 u_0 - A_1 u_1 - \dots$ ist eine stetige Funktion mit unendlich vielen Nullpunkten. Sind dieselben gleichmäßig verteilt, so ist sie Null; besitzen sie q einzelne Häufungsstellen, so bleibt sie in kleinen Bereichen um dieselben $< \varepsilon$, und hat außerhalb nur eine endliche Anzahl p von Nullstellen. Dies ist aber nicht möglich: man könnte, sobald $m > p + q$ ist, die Kurve $a_0 u_0 + a_1 u_1 + \dots a_m u_m$ so legen, daß sie überall gleiches Vorzeichen hat wie $f(x) - A_0 u_0 - A_1 u_1 - \dots$, und das Integral wieder positiv bliebe (da die kleinen Bereiche auf das Vorzeichen ohne Einfluß bleiben). Somit konvergiert $\sum A_m u_m$ wirklich gegen $f(x)$.

In ganz entsprechender Weise läßt sich eine geeigneten Stetigkeitsbedingungen genügende Funktion zweier Variablen $f(x, y)$ innerhalb des Vierecks $x = \pm 1, y = \pm 1$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = A_{00} u_0(x) u_0(y) + A_{10} u_1(x) u_0(y) + A_{01} u_0(x) u_1(y) \\ \quad + A_{11} u_1(x) u_1(y) + A_{02} u_0(x) u_2(y) + \dots \end{array} \right.$$

entwickeln mit

$$(36) \quad A_{mn} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y) u_m(x) u_n(y) dx dy,$$

die zweimal gliedweise nach x und y differentiiert werden darf, und wie $\sum \sum 1/(m^3 n^3)$ konvergiert. Dies ist die Entwicklung, die wir für unser Problem anwenden wollen. Wir setzen also

$$(36a) \quad \psi_{mn}(x, y) = u_m(x) u_n(y)$$

und es genügen diese Ausdrücke den oben p. 747 und 749 für die ψ_i gestellten Forderungen. Gleichzeitig erkennt man, daß (35) im allgemeinen nicht 3- oder 4mal differentiiert werden darf, wie schon oben hervorgehoben wurde, d. h. daß zur Rechnung dieser Differentialquotienten, bzw. zum direkten Einsetzen der Lösung in die Grundgleichung und Randbedingung,

unsere Ausdrücke sich nicht eignen werden. Durch diesen Verzicht wird aber gerade die Darstellung der Lösung selbst wesentlich vereinfacht.

Bevor wir zur wirklichen Berechnung des A_{mn} übergehen, ist es nötig, uns von den allgemeinen Eigenschaften der Lösung $w(x, y)$ ein Bild zu machen.

Allgemeine Eigenschaften der Lösung.

Sei $w(x, y)$ irgend eine Funktion, die den Gleichungen (3), (5), (6) genügt, und λ der durch (10) gegebene zugehörige Eigenwert. Die Symmetrie dieser Gleichungen und der Ränder läßt ohne weiteres die Richtigkeit folgender Sätze erkennen:

Ist $w(x, y)$ eine Lösung, so ist auch $w(-x, +y)$ eine zu demselben λ gehörige Lösung. Falls also w einem einfachen Ton entspricht, sind diese zwei Ausdrücke höchstens durch das Vorzeichen verschieden (welches durch die Bedingung (8) nicht festgelegt ist), d. h.:

Einfache Töne entsprechen Funktionen, die in bezug auf jede der beiden durch den Mittelpunkt des Quadrates gehenden zu den Seiten parallelen Achsen entweder gerade oder ungerade sind.

Mehrfache Töne können stets aus ebensolchen Funktionen linear zusammengesetzt werden.

Führt man ebenso die Substitution $x = y'$; $y = x'$; $w(x, y) = w'(x', y')$ aus, so ist in bezug auf die neuen Variablen die Form der Gleichungen ungeändert geblieben; $w'(x', y')$ muß ebenfalls eine Lösung sein, die zu demselben λ wie $w(x, y)$ gehört, und sich bei einfachen Tönen von $w(x, y)$ nur um das Vorzeichen unterscheiden kann.

Einfache Töne entsprechen also entweder in x und y symmetrischen oder in x und y antisymmetrischen Lösungen: d. h. im ersten Fall ändert sich w nicht bei Vertauschung von x und y ; im zweiten ändert es sein Vorzeichen.

Mehrfache Töne entsprechen Summen solcher Lösungen.

Dies bedingt, daß wir bei den Entwickelungen nach den $u_m(x) u_n(y)$ uns darauf beschränken können, die diesen verschiedenen Symmetrieverhältnissen genügenden Lösungen einzeln zu berücksichtigen. Ist w gerade in x und in y , so werden nur gerade $u_m(x)$, $u_n(y)$, d. h. gerade m , n auftreten. Ist es außerdem symmetrisch, so wird $A_{mn} = A_{nm}$; im anderen Falle

$A_{mn} = -A_{nm}$. So werden wir zu den anfangs besprochenen Entwickelungen nach den Aggregaten $u_m(x)u_n(y) \pm u_n(x)u_m(y)$ geführt.

Über den Verlauf der Knotenlinien läßt sich folgendes feststellen:

1. wenn sich zwei oder mehr Knotenlinien im Innern schneiden, so bilden sie nicht notwendig gleiche Winkel untereinander, wie man nach Analogie der Schwingungen von Membranen erwarten könnte;

2. ebensowenig steht eine den Rand schneidende Knotenlinie immer senkrecht auf ihm.

Zum Beweis entwickle man in der Nähe des betreffenden Schnittpunktes w nach Potenzen von x und y . Für den Fall zweier in $x = 0, y = 0$ sich schneidender Knotenlinien ist außer $w = 0$ auch $\partial w / \partial x = 0, \partial w / \partial y = 0$ für $x = 0, y = 0$ zu setzen; also $w = ax^2 + 2bxy + cy^2 + a'x^3 + \dots$ Bei Membranen ist nun die Gleichung $\Delta w + k^2 w = 0$ identisch zu erfüllen, woraus für die Glieder niedrigster Ordnung folgt $a + b = 0$; dies ist aber die Bedingung, damit die zwei durch $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ definierten Geraden sich rechtwinklig schneiden. Bei Platten dagegen bringt die Gleichung $\Delta \Delta w = k^2 w$ die Glieder m^{ter} Ordnung mit den Gliedern $m - 4^{\text{ter}}$ Ordnung in Zusammenhang; insbesondere bleiben die Glieder zweiter und dritter Ordnung ganz willkürlich; die Knotenlinien können sich unter beliebigen Winkeln schneiden. Wenn die Winkel, wenigstens bei Rechtecken, dennoch meist 90° betragen, so liegt dies in manchen Fällen an Symmetriegründen, öfter aber auch daran, daß, wie schon hervorgehoben, im Innern eines Quadrates für w die angenähernten Ausdrücke

$$\cos k_m x \cos k_n y \pm \cos k_n x \cos k_m y;$$

$$\cos k_m x \sin k_n y \pm \cos k_n x \sin k_m y \quad \text{usw.}$$

gelten, welche der Gleichung $\Delta w + (k_m^2 + k_n^2)w = 0$ genügen, und somit die Eigenschaften von Membranenschwingungen haben.

Am Rande ergeben die Bedingungen für die Glieder erster Ordnung in w gar nichts, für die Glieder $ax^3 + 2bxy + cy^3$ die Gleichung $a + \mu c = 0$, aus der über den Winkel der Knotenlinie gegen den Rand nichts geschlossen werden kann.

Interessanter sind die Ergebnisse an einer Ecke. Hier muß $(\partial^2 w / \partial x \partial y) = 0$ sein. Ferner ist

$$(37) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{nebst den Ableitungen} \\ \text{dieses Ausdruckes nach } y \end{array} \right\}$$

$$(38) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{dieses Ausdruckes nach } y \\ \text{nebst den Ableitungen} \end{array} \right\}$$

$$(39) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{nebst den Ableitungen} \\ \text{dieses Ausdruckes nach } x \end{array} \right\}$$

$$(40) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{dieses Ausdruckes nach } x \\ \text{nebst den Ableitungen} \end{array} \right\}$$

endlich

$$(41) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \lambda w$$

eine Gleichung, die beliebig oft nach x und y differentiiert werden darf. Wir legen die Koordinatenachsen in die zwei sich in der Ecke schneidenden Seiten und suchen die Koeffizienten der Taylorschen Entwicklung

$$w = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots,$$

wo u_m ein homogenes Polynom m^{ten} Grades in x und y ist, zu bestimmen. Aus (37) und (39) und $\partial^2 w / \partial x \partial y = 0$ folgt zunächst, daß u_3 identisch verschwindet, wenn $\mu \neq 1$ ist, was wir annehmen. Ebenso ergeben (38) und (40), nebst den Differentialquotienten von (37) nach y , (39) nach x , daß $u_3 \equiv 0$ ist. Danach weicht w von dem linearen Ausdruck $u_0 + u_1 = a + bx + cy$ nur in den Gliedern vierter Ordnung ab, was zuerst von Lamb (l. c.) bemerkt worden ist. *An den Ecken wird die Platte nicht merklich deformiert.*

Für die fünf Koeffizienten der Glieder vierter Ordnung ergeben sich durch Differentiation von (37) bis (40) für

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)_{x=0, y=0}, \quad \text{usw.}$$

vier Gleichungen, aus (41) eine fünfte; die Koeffizienten der selben sind also sämtlich bestimmt und proportional a :

$$u_4 = \frac{\lambda a}{48(1-\mu)} [x^4 + y^4 - 6\mu x^2 y^2].$$

Ebenso sind die Glieder fünfter Ordnung linear in b, c ; diejenigen sechster und siebenter Ordnung verschwinden usw. Für die Glieder m^{ter} Ordnung ergeben sich durch $m - 2$ fache Differentiation von (37) nach y , (39) nach x ; durch $m - 3$ fache von (38) nach y , (40) nach x vier Gleichungen; die Bildung der $m - 3$ Differentialquotienten von (41) vervollständigt die Zahl der $m + 1$ Gleichungen, durch welche alle Koeffizienten von u_m durch solche von u_{m-4} , also schließlich durch a, b, c und λ ausgedrückt werden können.

Die Entwicklung von w in einer Ecke hängt also nur ab von den vier Konstanten a, b, c, λ . Da wir aber über den weiteren Verlauf des Randes in einiger Entfernung und über die daselbst zu erfüllenden Bedingungen hierbei nichts vorausgesetzt haben, so müßte die Entwicklung von w eine unendliche Anzahl Konstanten enthalten; *der von diesen Konstanten abhängige Teil von w ist an der Stelle $x = 0, y = 0$ nicht nach Potenzreihen entwickelbar, die Lösung ist in den Ecken nicht analytisch.* Nur sehr ausnahmsweise, z. B. in dem oben zitierten, von Lord Rayleigh bemerkten Spezialfall $\mu = 0$ sind einige der Lösungen analytisch, weil es dann gelingt, mit den drei zur Verfügung stehenden Konstanten den Bedingungen an den anderen Rändern zu genügen.

Es ist wahrscheinlich, daß um die Ecken herum die Lösung mehrdeutig ist, so daß die analytische Fortsetzung von $w(x, y)$ über den einen Rand hinaus, um die Ecke herum bis zum anderen Rand und ins Innere, hier nicht die Ausgangswerte von w ergibt.

Für den Fall eingespannter Platten ist ein entwickelbarer Bestandteil überhaupt nicht vorhanden, wie man leicht findet.

Berechnung der Koeffizienten.

Es seien die Koordinatenachsen durch den Mittelpunkt des Quadrates parallel zu den Seiten gelegt und als Längeneinheit die halbe Quadratseite gewählt, so daß für $u_m(x), u_n(y)$ die Ausdrücke (24), (25) gelten.

Man hat nunmehr einen Ausdruck der Form

$$(42) \quad w_s = \sum_0^s \sum_0^s A_{mn} u_m(x) u_n(y)$$

in das Integral

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(A_{mn}) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right. \\ \left. + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right)^2 - \lambda_s w_s^2 \right\} dx dy \end{array} \right.$$

einzu tragen, und die Koeffizienten von A_{mn}^2 , $A_{mn} A_{pq}$ zu berechnen. Dies führt zur Berechnung der Größen:

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{mn} = \int_{-1}^{+1} u_m''(x) u_n(x) dx = \frac{2k_m^4 [u_m' u_n - u_m u_n']_{x=1}}{k_m^4 - k_n^4}; \\ \omega_{0m} = \omega_{1m} = 0; \end{array} \right.$$

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{mn} = \alpha_{nm} = \int_{-1}^{+1} u_m' u_n' dx = \frac{2[k_m^4 u_m u_n' - k_n^4 u_n u_m']_{x=1}}{k_m^4 - k_n^4}; \\ \alpha_{0n} = \alpha_{n0} = 0 \end{array} \right.$$

$$\int_{-1}^{+1} u_m'' u_n'' dx = 0 \quad (m \neq n); \quad \int_{-1}^{+1} u_m'^2 dy = k_m^4.$$

Man erhält diese Formeln durch Berücksichtigung der Differentialgleichung für u_m und u_n und partielle Integration. Für $m = n$ sind sie ungültig; hier ergibt sich

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{mm} = \frac{-k_m^2 (\operatorname{Cot}^2 k_m - \cos^2 k_m)}{\operatorname{Cot}^2 k_m + \cos^2 k_m} + 2k_m \frac{\cos^2 k_m \operatorname{Cot}^2 k_m \operatorname{Tg} k_m}{\operatorname{Cot}^2 k_m + \cos^2 k_m} \\ \text{für } m \text{ gerade, } (\omega_{00} = 0), \\ \omega_{mm} = \frac{-k_m^2 (\sin^2 k_m + \sin^2 k_m)}{\sin^2 k_m - \sin^2 k_m} + 2k_m \frac{\sin^2 k_m \sin^2 k_m \operatorname{Cot} k_m}{\sin^2 k_m - \sin^2 k_m} \\ \text{für } m \text{ ungerade, } (\omega_{11} = 0), \end{array} \right.$$

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{mm} = \frac{k_m^2 (\operatorname{Cot}^2 k_m - \cos^2 k_m)}{\operatorname{Cot}^2 k_m + \cos^2 k_m} + 6k_m \frac{\cos^2 k_m \operatorname{Cot}^2 k_m \operatorname{Tg} k_m}{\operatorname{Cot}^2 k_m + \cos^2 k_m} \\ \text{für } m \text{ gerade, } (\alpha_{00} = 0), \\ \alpha_{mm} = \frac{k_m^2 (\sin^2 k_m + \sin^2 k_m)}{\sin^2 k_m - \sin^2 k_m} + 6k_m \frac{\sin^2 k_m \sin^2 k_m \operatorname{Cot} k_m}{\sin^2 k_m - \sin^2 k_m} \\ \text{für } m \text{ ungerade, } (\alpha_{11} = 3). \end{array} \right.$$

Begnügt man sich mit vier genauen Ziffern, so ist

$$\frac{\cos k_m}{\sqrt{\cos^2 k_m + \cos^2 k_m}} = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{2}}; \quad \frac{\sin k_m}{\sqrt{\sin^2 k_m - \sin^2 k_m}} = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{2}}$$

für $m > 2$,

$$\frac{\cos k_2}{\sqrt{\cos^2 k_2 + \cos^2 k_2}} = \frac{-[1 - 0,0173]}{\sqrt{2}}$$

und es folgt für $m > 2, n > 2$:

$$(48) \quad \omega_{mn} = \sigma \frac{4 k_m^4 [k_m - k_n]}{k_m^4 - k_n^4},$$

wo $\sigma = 0$, wenn m und n verschiedener Parität sind; $= (-1)^{\frac{m+n}{2}}$, wenn m und n gerade; und $= -(-1)^{\frac{m+n}{2}}$, wenn m und n ungerade sind. Es ist $k_m = (m - \frac{1}{2})\pi/2$ zu setzen

$$(49) \quad \omega_{mm} = -k_m^2 + k_m,$$

$$(50) \quad \begin{cases} \alpha_{mn} = \sigma \frac{4 [k_m^4 k_n - k_n^4 k_m]}{k_m^4 - k_n^4}, \\ \alpha_{mm} = +k_m^2 + 3k_m. \end{cases}$$

Mit einer Genauigkeit von mindestens 2 Proz. sind diese Formeln auch für m und n gleich 2 anwendbar, und es ist

$$(50a) \quad \begin{cases} \omega_{0n} = 0, \quad \omega_{n0} = 2k_n(-1)^{\frac{n}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \text{für } n \text{ gerade,} \\ = 0 \text{ für } n \text{ ungerade,} \end{array} \right. \\ \alpha_{0n} = \alpha_{n0} = 0, \\ \omega_{1n} = 0, \quad \omega_{n1} = 2\sqrt{3}(k_n - 1)(-1)^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \text{für } n \text{ ungerade,} \\ = 0 \text{ für } n \text{ gerade.} \end{array} \right. \\ \alpha_{11} = 3, \quad \alpha_{1n} = \alpha_{n1} = 2\sqrt{3}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \end{cases}$$

Der Koeffizient von A_{mn}^2 im Integral V wird nun

$$(51) \quad k_m^4 + k_n^4 + 2\mu \omega_{mm} \omega_{nn} + 2(1-\mu) \alpha_{mm} \alpha_{nn} - \lambda_s = a_{mn}^{(mn)} - \lambda_s.$$

Der Koeffizient von $2A_{mn} A_{pq}$

$$(52) \quad \mu [\omega_{mp} \omega_{qn} + \omega_{pn} \omega_{mq}] + 2(1-\mu) \alpha_{pq} \alpha_{mp} = a_{mn}^{(pq)}$$

und es sind die Gleichungen zu lösen

$$(53) \left\{ \begin{array}{l} 0 = (a_{00}^{(00)} - \lambda_s) A_{00} + a_{01}^{(00)} A_{01} + a_{10}^{(00)} A_{10} + \dots + a_{ss}^{(00)} A_{ss}, \\ 0 = a_{00}^{(01)} A_{00} + (a_{01}^{(01)} - \lambda_s) A_{01} + a_{10}^{(01)} A_{10} + \dots + a_{ss}^{(01)} A_{ss}, \\ \vdots \\ 0 = a_{00}^{(s,s)} A_{00} + a_{01}^{(s,s)} A_{01} + a_{10}^{(s,s)} A_{10} + \dots + (a_{ss}^{(s,s)} - \lambda_s) A_{ss}. \end{array} \right.$$

Zur Vereinfachung wird man die aus der Symmetrie der Lösung sich ergebenden Beziehungen zwischen den A_{mn} sogleich einführen: bei einer in x und y geraden symmetrischen Lösung kommen nur gerade Indizes in Betracht und es ist $A_{mn} = A_{nm}$; die Zahl der Unbekannten reduziert sich so bei gegebenem s beträchtlich. Ähnliches gilt für die anderen Fälle von Symmetrie. Nichtsdestoweniger wäre eine Rechnung auf drei bis vier Stellen für eine größere Anzahl von Eigenschwingungen undurchführbar, wenn das Gleichungssystem nach dieser Reduktion nicht die Eigenschaft hätte, daß die $a_{mn}^{(m,n)}$ der Diagonalglieder erheblich größer sind und mit m und n rascher wachsen als die übrigen $a_{mn}^{(p,q)}$. Infolgedessen läßt sich das System (53) mit einem geringen Aufwand an Rechnung durch sukzessive Approximationen leicht lösen. Wir wollen dies für den Fall in x und y ungerader, aber symmetrischer Schwingungen zeigen, zu welchen der Grundton der Platte gehört. Wir wählen für μ den Wert $\mu = 0,225$ (vgl. unten), und entwickeln bis zu den Gliedern in u_5 , setzen also $s = 5$. Es sei abkürzend $u_n(y) = v_n$ gesetzt und

$$w = A_0 u_1 v_1 + A_1 (u_1 v_3 + v_1 u_3) + A_2 u_3 v_3 + A_3 (u_1 v_5 + u_5 v_1) + A_4 (u_3 v_5 + u_5 v_3) + A_5 u_5 v_5.$$

Das System (53) wird hier

$$(54) \left\{ \begin{array}{l} 0 = (13,95 - \lambda) A_0 - 32,08 A_1 + 18,60 A_2 + 32,08 A_3 - 37,20 A_4 + 18,60 A_5, \\ 0 = -16,04 A_0 + (411,8 - \lambda) A_1 - 120,0 A_2 - 138,6 A_3 + 166,8 A_4 + 140 A_5, \\ 0 = +18,60 A_0 - 240,0 A_1 + (1686 - \lambda) A_2 - 218,0 A_3 - 1134 A_4 + 330 A_5, \\ 0 = +16,04 A_0 - 138,6 A_1 + 109,0 A_2 + (2945 - \lambda) A_3 - 424 A_4 + 179 A_5, \\ 0 = -18,6 A_0 + 166,8 A_1 - 567 A_2 - 424 A_3 + (6908 - \lambda) A_4 - 1437 A_5, \\ 0 = +18,6 A_0 + 280 A_1 + 330 A_2 + 358 A_3 - 2874 A_4 + [13674 - \lambda] A_5. \end{array} \right.$$

Würde sich das System wirklich auf seine Diagonalglieder beschränken, so wäre die kleinste Wurzel $\lambda = 13,95$, die nächste 411,8 usw.; für die erste bleibt A_0 willkürlich, die

anderen A_i sind Null; für die zweite gilt dies für A_1 usw. Da es auf den konstanten Faktor nicht ankommt, setzen wir, um den Grundton zu erhalten, $A_0 = 1$, und in erster Annäherung $\lambda_0 = 18,95$. Dann ergeben die fünf letzten Gleichungen die übrigen A_i . Wesentlich ist nun, daß diese A_i gegen 1 klein sind, so daß sie nur mit geringerer Genauigkeit berechnet zu werden brauchen. Beschränkt man sich auf vier Stellen beim Schlußresultat, so sind sämtliche Operationen, auch schon die Berechnung der ω_{mn} und α_{mn} und ihrer in den $a_{mn}^{(p,q)}$ auftretender Produkte, mit dem Rechenschieber ausführbar, wodurch bei dem Charakter dieser Operationen die Rechnung sich sehr einfach und sicher gestaltet. Direkt mit vier Stellen zu berechnen sind bloß die in den ω_{mn} , α_{mn} und den $a_{mn}^{(m,n)}$ auftretenden Potenzen der k_p .

Wir berechnen für die A_i eine erste Approximation, indem wir alle Glieder rechts vernachlässigen neben den Diagonalgliedern, es wird also

$$A_1 = \frac{+16,04}{411,8 - 18,95}, \quad A_2 = \frac{-18,60}{1886 - 18,95}, \quad A_3 = \dots$$

Diese A_i sind ersichtlich sämtlich klein. Aus der ersten Gleichung folgt eine kleine Korrektion für λ :

$$\delta\lambda = -32,08 A_1 + 18,60 A_2 + 32,08 A_3 - 37,20 A_4 + 18,60 A_5.$$

Diese Werte der A_i und $\lambda + \delta\lambda$ setzen wir in (54) ein; das Ergebnis wird in den einzelnen Gleichungen nicht Null sein, aber doch eine kleine Zahl. Die Korrekturen der A_i , die dadurch nötig werden, berechne man wieder unter alleiniger Berücksichtigung der Diagonalglieder; eine oder zwei sukzessive Korrekturen genügen meist, um die vierte Stelle bis auf wenige Einheiten festzustellen.

Hat man eine erste Approximation schon berechnet, unter Berücksichtigung einer kleineren Anzahl Glieder der Entwicklung, so wird man sie bei der Berechnung der erweiterten Formel vorteilhaft benutzen können. Im vorliegenden Falle ist es z. B. zweckmäßig, zuerst das System

$$(55) \quad \begin{cases} (18,95 - \lambda) A_0 - 32,08 A_1 = 0 \\ -16,04 A_1 + (411,8 - \lambda) A_1 = 0 \end{cases}$$

zu lösen, welches dem Ansatz

$$w = A_0 u_1 v_1 + A_1 (u_1 v_3 + v_1 u_3)$$

entspricht; diese Werte trägt man in das vollständigere System (54), und berechnet nun die Korrekturen $\delta A_0, \delta A_1$ und $A_2 \dots A_5$ in der angegebenen Weise.¹⁾

Die Korrektion, die λ erfährt, ist *stets negativ*, weil λ das Minimum des oben besprochenen Integrals ist, welches bei der Anwendung von mehr Konstanten notwendig abnehmen muß.

Nimmt man $A_1 = 1, \lambda = 411,8$, und berechnet ebenso die Korrekturen, so erhält man den nächsten Oberton, der dieselbe Symmetrie besitzt. Wieder ist die Korrektion von λ negativ; dies tritt jedoch erst ein für das System (54), nicht schon für die erste Approximation (55). Der Grund liegt darin, daß das neue λ einem Minimumwert des Integrals nur entspricht, wenn die Bedingung

$$\iint w_0 w \, dx \, dy = 0 \quad (w_0 = \text{Grundton})$$

hinzugefügt wird, welcher durch den Ansatz (55) nur roh genügt wird, während (55) sie innerhalb der Genauigkeit der Rechnung erfüllt. In dieser Bedingung liegt auch, wenn mehrere Oberschwingungen mittels (54) berechnet worden sind, eine einfache Kontrolle der Rechnung. Denn ist $w = A_0 u_1 v_1 + \dots$ die eine derselben, $w' = A'_0 u_1 v + \dots$ irgend eine andere, so ist

$$\begin{aligned} \iint w w' \, dx \, dy &= A_0 A'_0 + 2 A_1 A'_1 + A_2 A'_2 + 2 A_3 A'_3 \\ &\quad + 2 A_4 A'_4 + A_5 A'_5 \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck muß einen Betrag haben, der zu vernachlässigen ist.

Der Umstand, daß die Diagonalglieder größer sind und rascher wachsen als die übrigen, gilt auch für höhere Approximationen, und folgt daraus, daß die ω_{mn}, α_{mn} ($m \neq n$), die in die anderen Glieder eingehen, nach (48), (49) und (50) wesentlich langsamer wachsen als die ω_{mm} und α_{nn} , k_m^4 und k_n^4 der

1) Die erste Annäherung gibt, wenn $A_0 = 1$ ist:

$A_1 = 0,0408; A_2 = -0,0058; A_3 = -0,0036; A_4 = +0,0019; A_5 = -0,0022$.

Exakt ist:

$A_1 = 0,0394; A_2 = -0,0040; A_3 = -0,0034; A_4 = +0,0011; A_5 = -0,0019;$

und $\lambda = 12,43$ statt 18,95.

Diagonalglieder. Für höhere Obertöne, die komplizierten Funktionen entsprechen, ist natürlich die Entwicklung weniger rasch konvergent; immerhin bleibt auch hier der Fehler, der bei Beschränkung auf das Hauptglied $u_m v_n \pm v_m u_n$ entsteht, von der Ordnung $1/10$, und dies bedingt, wegen des raschen Oszillierens der u, v für größere m , für die Klangfiguren nur Fehler von etwa 1 Proz.; für die λ von 5—10 Proz.

Die Aggregate $u_0 v_0$; $u_0 v_1 \pm u_1 v_0$, die linearen Funktionen von x und y entsprechen, ergeben $\lambda = 0$; dies ist selbstverständlich, da die Platte eben bleibt. Aus dem Ausdruck von J verschwinden sie, und können daher bei allen Rechnungen weggelassen werden. Bei Entwickelungen nach den Eigenfunktionen w , der Platte aber müssen sie beibehalten werden, ebenso wie u_0 und u_1 für den Stab.

Im folgenden sind die höheren Approximationen für diejenigen Töne angegeben, die in erster Annäherung den Formeln $u_m v_n \pm v_m u_n$ entsprechen, mit $m < 4$, $n < 4$; es sind die Glieder bis zu $m = n = 5$ beibehalten, womit die dritte Stelle bis auf 1—2 Einh. sichergestellt ist. Dies bedingt für die Klangfiguren eine noch geringere Unsicherheit, die ganz innerhalb der Beobachtungsfehler liegt.

Dem Aggregat $u_m v_n + v_m u_n$ entspricht stets ein etwas größeres λ , also ein höherer Ton, als dem Aggregat $u_m v_n - v_m u_n$, wenn m und n beide gerade oder ungerade sind. In dem anderen Falle liegt ein Doppelton vor, und es sind die Schwingungen $w = u_m v_n$, $w = v_m u_n$ auch einzeln möglich, ferner jede lineare Verbindung der Form $A u_m v_n + B v_m u_n$.

Zur Berechnung der *Klangfiguren*, d. h. der Linien, in welchen w verschwindet, wird man zweckmäßig die beobachteten Werte als erste Approximation benutzen.¹⁾ Bei der Berechnung der Korrektionen, die stets sehr klein sind, genügt die Berücksichtigung des Hauptgliedes der Formel. Von m und $n = 4$ an bis m und $n = 7$ sind die Klangfiguren auf Grund der vereinfachten Formel $u_m v_n \pm u_n v_m$ berechnet, da

1) Tabellen für u_2 , u_3 gibt Lord Rayleigh, Sound § 178; für vier Stellen sind die zweiten Differenzen bei der Interpolation zu berücksichtigen. Zur direkten Berechnung auch der u_4 , $u_5 \dots$ benutzt man mit Vorteil die „Tafeln der Funktionen cos und sin“ (Kreis- und Hyperbelfunktionen) von Dr. Carl Burau, Berlin 1907.

hier genaue Beobachtungen nicht vorliegen und auch schwer möglich sind.

Die Tonhöhen.

Aus einem bekannten λ ergibt sich nach (4) die Anzahl Schwingungen pro Sekunde

$$(56) \quad v = \frac{h}{4\pi} \sqrt{\frac{E\lambda}{3\rho(1-\mu^2)}}.$$

Genaue Beobachtungen über die *absoluten* Tonhöhen unter genauer Angabe der Elastizitätskonstanten, des Verhältnisses $2h$ der Dicke zur halben Seite der Platte und der Dichte ρ des betreffenden Materials sind mir nicht bekannt. Die *relativen* Tonhöhen der verschiedenen Obertöne gegen den Grundton, wenn für diesen der Ton G gesetzt wird, hat Chladni¹⁾ angegeben. Es ist die gleichmäßig temperierte Skala vorausgesetzt; ein + bedeutet, daß der wahrgenommene Ton etwas höher war, ein - daß er tiefer war. Leider ist von Chladni nicht angegeben, ob er Metall oder Glas benutzt habe, wodurch der Wert von μ erheblich unsicher wird; vielleicht hat er Platten aus beiderlei Material in einzelnen Fällen gebraucht, im allgemeinen jedoch zeigt die Übereinstimmung mit unserer für Glas ausgeführten Rechnung, daß er Glasplatten benutzt hat. Durch den Übergang zu Metall wird die Tonhöhe leicht um eine Sekunde verändert, wie dies beim Kreis schon die Berechnungen von Kirchhoff gezeigt haben.

Die Tonhöhen, die auf Grund exakterer Formeln (unter Berücksichtigung höherer Approximationen) berechnet sind, stimmen *genau* mit Chladnis Angaben überein. Es sind dies die Hauptschwingungen, in der Tabelle mit * bezeichnet. Die übrigen, nach dem einfachen Ansatz $w = u_1 v_1 \pm v_1 u_1$ berechneten, sind teilweise um $1/3$ Ton zu hoch. Dies wird uns nicht wundern, da ja die entsprechenden λ , wie oben bemerkt, stets zu groß sind, und zwar sind sie bei den Hauptschwingungen, wie sich gezeigt hat, meist um 5—10 Proz. zu groß, was einem viertel bis einem halben Tone entspricht. So ist λ aus dem Ansatz $u_1 v_1$ gleich 13,74; bei genauer Berechnung dagegen

1) E. F. F. Chladni, Akustik, p. 188. Leipzig 1802.

12,43 (vgl. oben). Würde man die höheren λ auf den Grundton beziehen, wie er in erster Approximation gegeben ist, so würden die Töne um $1/2$ Ton zu erniedrigen sein, und die Übereinstimmung wäre so gut wie sie überhaupt, bei der oben erwähnten Unsicherheit, erwartet werden kann.

In der folgenden Tabelle sind die Schwingungen nach ihren Tonhöhen geordnet, und jedesmal die charakteristischen Hauptglieder $u_m v_n \pm v_m u_n$ angegeben, nebst den zugehörigen λ . Das Zeichen \pm deutet einen Doppelton an.

Tabelle der Tonhöhen ($\mu = 0,225$).

Hauptglieder	λ	ber.	beob.	Hauptglieder	λ	ber.	beob.
$u_1 v_1$	12,43	G^*	G	$u_3 v_4 \pm u_4 v_3$	3240	$g_3 +$	fis_3
$u_0 v_2 - v_0 u_2$	26,40	d^*	d	$u_5 v_3 \pm u_2 v_5$	3927	$a_3 +$	$gis_3 +$
$u_0 v_2 + v_0 u_2$	35,73	e^*	e	$u_4 v_4$	5480	$ais_3 +$	ais_3
$u_1 v_2 \pm u_2 v_1$	80,8	h^*	h	$u_0 v_6 - u_6 v_0$	5500	$c_4 -$	$-^3)$
$u_0 v_3 \pm u_3 v_0$	237,1	$gis_1^* + gis_1$		$u_3 v_5 - u_5 v_3$	5570	$c_4 -$	$ais_3 -$
$u_1 v_1$	266,0	$ais_1^* - ais_1$	$-$	$u_0 v_4 + u_6 v_0$	5640	$c_4 -$	$-^3)$
$u_1 v_3 - u_3 v_1$	316,1	h_1^*	h_1	$u_1 v_6 \pm v_1 u_6$	6036	$c_4 +$	$c_4 -$
$u_1 v_5 + u_3 v_1$	378	cis_2^*	cis_2	$u_3 v_5 + u_5 v_3$	6303	cis_4	$c_4 -$
$u_2 v_3 \pm u_3 v_2$	746	$jis_2^* + fis_2$		$u_2 v_6 - u_6 v_2$	7310	$d_4 +$	$cis_4 +$
$u_0 v_4 - v_0 u_4$	886	gis_3	gis_3	$u_2 v_6 + u_0 v_2$	7840	$dis_4 -$	$d_4 -$
$u_0 v_4 + v_0 u_4$	941	$gis_5 +$	$gis_5 +$	$u_6 v_4 \pm u_4 v_6$	9030	e_4	dis_4
$u_1 v_4 \pm u_4 v_1$	1131	ais_2	$ais_2 -$	$u_6 v_3 \pm u_3 v_6$	10380	f_4	e_4
$u_3 v_3$	1554	$c_3 +$	c_3	$u_5 v_5$	13670	$g_4 +$	$jis_4 +$
$u_2 v_4 - u_4 v_2$	1702	$d_3 -$	cis_3	$u_0 v_4 - u_4 v_6$	13840	$g_4 +$	$g_4 +$
$u_2 v_4 + u_4 v_2$	2020	dis_3	d_3	$u_6 v_4 + u_4 v_6$	15120	$gis_4 +$	$g_4 +$
$u_0 v_5 \pm v_0 u_5$	2500	$f_3 -$	$f_3 -$	$u_6 v_5 \pm u_5 v_6$	20400	h_4	$ais_4 -$
$u_1 v_5 - v_1 u_5$	2718	jis_3	$jis_3 -$	$u_6 v_6$	28740	d_5	$-^3)$
$u_1 v_5 + v_1 u_5$	2945	$jis_3 +$	$jis_3^{(1)}$				

Dabei ist, um daran zu erinnern, $u_m = u_m(x)$, $v_n = u_n(y)$ gesetzt.

Die Übereinstimmung der mit * bezeichneten Schwingungen mit Chladni Beobachtung ist eine vollkommene, während nach Kirchhoff's Rechnungen für den Kreis Abweichungen sich zeigen, die für $\mu = 1/4$ (Poisson) kleiner sind als für

1) Von Chladni von dem vorigen Ton nicht getrennt.

2) Von Chladni nicht beobachtet.

$\mu = \frac{1}{3}$ (Wertheim). Dies zeigt, daß Chladni auch hier mit Glasscheiben operiert hat, und daß für Glas μ jedenfalls kleiner als $\frac{1}{4}$ ist, und von dem hier benutzten Wert 0,225 nur wenig abweicht.

Benutzt man für eine Schwingung den angenäherten Ausdruck $w_{mn} = u_m(x)u_n(y) \pm u_n(x)u_m(y)$, so berechnet sich, wie schon hervorgehoben, das zugehörige angenäherte λ aus der Formel

$$\lambda = \frac{J}{a},$$

wo J_{mn} das für $w = w_{mn}$ gebildete Integral (7) ist, während

$$a = \iint w_{mn}^2 dx dy.$$

Setzt man hierin die für u_m (p. 752) gegebenen Ausdrücke ein, so wird

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = k_m^4 + k_n^4 + \mu [2\omega_{mm}\omega_{nn} \pm \omega_{mn}^2 \pm \omega_{nm}^2] \\ \quad + 2(1-\mu)[\alpha_{mm}\alpha_{nn} \pm \alpha_{mn}^2], \quad m \neq n, \end{array} \right.$$

$$(58) \quad \lambda = 2k_m^4 + 2\mu\omega_{mm}^2 + 2(1-\mu)\alpha_{mm}^2 \quad \text{für } m = n.$$

Bei $m = n$ kommt das untere Vorzeichen natürlich nicht in Betracht; bei den Doppeltönen verschwinden in λ die Glieder mit den doppelten Vorzeichen, so daß beide Vorzeichen dasselbe λ ergeben.

Nach den Gleichungen (48) bis (50a) sind die ω_{mm} , α_{mm} zweiten Grades in den k_i ; die α_{mn} und ω_{mn} für $m \neq n$ dagegen ersten Grades. Zur Aufstellung einer angenäherten Formel für λ beschränken wir uns auf die Glieder vierten und dritten Grades; dann können wir die \pm Glieder in λ gegen die übrigen vernachlässigen (wodurch je zwei benachbarte Töne in einem vereinigt werden). Für die ω_{mm} , α_{mm} benutzen wir die Ausdrücke (49), (50), (50a), so ergibt sich angenähert

$$(59) \quad \lambda = (k_m^2 + k_n^2)^2 + 2\mu k_m^2 k_n^2 + (6 - 8\mu) k_m k_n (k_m + k_n),$$

wobei

$$k_m = \frac{\pi}{2} \left(m - \frac{1}{2} \right)$$

ist; für $m = 0$ und $m = 1$ ist dagegen $k_0 = k_1 = 0$ zu setzen.

Ist $u = 0$, so schwingt die Fläche angenähert wie ein Stab, und es stimmen, wie bei einem solchen, die Tonhöhen

mit den Quadraten der ungeraden Zahlen angenähert überein, wie schon Chladni bemerkte. Für $n = 1$ ergibt sich dasselbe Resultat; nach der Formel (57) sind die entsprechenden Töne aber in Wirklichkeit etwas verschieden, die Abweichung ist bei den Grundtönen relativ am bedeutendsten. Sind endlich m und n genügend groß, so ergibt sich das *asymptotische Gesetz der λ*

$$(60) \quad \lambda = [m^4 + n^4 + 2(1 - \mu)m^2 n^2] \left(\frac{\pi}{2}\right)^4.$$

Die Schwingungszahlen sind der Wurzel aus λ proportional.

Die systematischen Fehler bei der Beobachtung Chladnianischer Klangfiguren.

Für eine Anzahl von Klangfiguren hat Strehlke¹⁾ sehr genaue Messungen an verschiedenen sorgfältig gearbeiteten quadratischen und kreisförmigen Platten aus Spiegelglas angestellt. Insbesondere hat er drei quadratische Platten benutzt, deren Dicke etwa $1/70$, $1/65$ und $1/40$ der Seite war. Die Beobachtungen stimmen für die drei Platten innerhalb 0,001 der Seitenlänge, manchmal noch genauer. Diese Genauigkeit erweist sich jedoch für den Vergleich mit der Theorie als illusorisch und ist durch den Umstand ermöglicht, daß Strehlke die Unterstützung und die Erregung durch den Violinbogen für eine bestimmte Klangfigur bei allen Versuchen genau an dieselben Stellen verlegte. Welcher Art nun bei diesen Versuchen die wichtigste systematische Fehlerquelle ist, ergibt die Diskussion der Messungsergebnisse in folgender Weise:

In einer Klangfigur (vgl. unten Fig. 21), in welcher, der Symmetrie nach, die beiden Diagonalen Knotenlinien sein sollten, findet Strehlke an deren Stelle zwei hyperbelartige Kurven, deren Scheitel im Abstand von 0,037 (die Quadratseite als Einheit gesetzt) lagen. Auch Chladni gibt an, daß er dies Verhalten *unter Umständen* beobachtet habe. Theoretisch ist dies ausgeschlossen; denn durch eine Drehung um 90° entsteht bei solcher Dissymmetrie eine neue Figur, die der-

1) F. Strehlke, Repertorium der Physik, von H. W. Dove, 3. p. 112 ff. Berlin 1839; vgl. auch Pogg. Ann. 95. p. 577. 1855; 146. p. 319. 1872.

selben Tonhöhe entsprechen muß; es läge also ein Doppelton vor und eine unendliche Anzahl von Figuren müßte möglich sein; dies widerspricht der Erfahrung, die zweite Figur muß also mit der ersten identisch sein, die Diagonalen sind Knotenlinien. Wie kommt diese Abweichung zustande?

Es ist klar, daß zur Überwindung der Reibung die Schwingungsamplitude ein gewisses, von der Beschaffenheit der Oberfläche und des Sandes abhängiges Minimum $\pm \varepsilon$ überschreiten muß; unterhalb desselben bleibt der Sand unbeweglich. Wo sich die zwei Durchmesser schneiden, ist aber außer $w = 0$ auch

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Bezogen auf die Durchmesser als Achsen ist der Ausdruck für die Amplitude $w(x, y)$ in erster Annäherung

$$w = A \cdot xy \quad (A = \text{const.})$$

und der Sand bleibt in indifferentem Gleichgewicht innerhalb eines Gebietes, welches von den zwei Hyperbeln

$$\pm \varepsilon = Axy$$

begrenzt wird. Ob der Sand sich hier gleichmäßig verteilt oder gegen die einen oder anderen Ränder des Gebietes gedrängt wird (beide Fälle sind beobachtet), hängt von der Stelle ab, wo der Bogen angelegt wird, von welcher aus, neben dem betrachteten Ton, auch Nebentöne von verschiedener, zum Teil beträchtlicher Höhe sich als Wellen ausbreiten und eine Bewegung des Sandes bewirken können. Theoretisch ist der Vorgang nicht zu übersehen wegen der Reflexionen an den Seiten des Quadrates. Bei dem besprochenen Versuch von Strehlke ist der Sand an die Ränder des Gebietes getrieben worden, womit die beträchtliche Abweichung von der Theorie sich erklärt. Allein dieselbe Ursache ist auch in der ganzen Ausdehnung der Klangfiguren wirksam, wenn auch hier der Anstieg von der Amplitude Null zu $\pm \varepsilon$ rascher erfolgt, der mögliche Fehler also kleiner wird. Aber mehrere Tausendstel der Seitenlänge beträgt er unter allen Umständen, so daß die Übereinstimmung der Versuche Strehkkes auf weniger als $1/1000$ der Seite untereinander, und ihre Abweichung um mehrere Tausendstel, ja

um beinahe $\frac{1}{100}$ (in einzelnen Fällen) von der Theorie nichts besagt.

Hierher gehört auch die von Strehlke und schon von Chladni gemachte Beobachtung, daß bei einer Kreisscheibe, wenn drei oder mehr konzentrische Kreise die Klangfigur bilden, der innerste Kreis entweder diffus bleibt, oder eine Ellipse bildet, während die anderen Kreise keine meßbare Abweichung von der Symmetrie zeigen. Strehlke¹⁾ erblickt den Grund in einer ungenügenden Homogenität der Platte; doch ist kaum begreiflich, warum diese Ursache stets nur den innersten Kreis beeinflussen sollte, und warum die Kreise manchmal einfach diffus bleiben. Dies folgt aber ohne weiteres aus dem Umstand, daß die Amplitude bei drei Kreisen gering ist, und vom Rand gegen die Mitte zu im Mittel abnimmt; daraus folgt um den innersten Kreis eine besonders große Zone indifferenten Gleichgewichtes für den Sand. Wird nun die Amplitude sehr erhöht, etwa indem man zum Bestreichen der Platte mit dem Bogen ein in die Mitte eingebohrtes kreisförmiges Loch benutzt (Strehlke), so werden die Sandkörner zum Teil an den Rand des Bereiches getrieben, es entsteht eine elliptische Figur, deren Achsenrichtungen von der Streichrichtung abhängen. Bei Strehlke war die eine Achse um + 0,003 zu groß, die andere um 0,003 zu klein (Durchmesser der Platte = 1); eine Größenordnung, wie sie a priori zu erwarten war.

Den Einfluß der Streichrichtung auf die Knotenlinien hat auch Zeissig²⁾ direkt beobachtet.

Den Wert von μ für seine Platten hat Strehlke nicht angegeben, wodurch der Vergleich mit der Theorie ebenfalls etwas (wenn auch nur wenig) unsicher wird. Für Glas haben verschiedene Beobachter Werte zwischen 0,210 (Voigt) und 0,257 (Caulon) erhalten; ich habe das Mittel $\mu = 0,225$ gewählt, welches jedenfalls nur um $\frac{1}{10}$ fehlerhaft sein wird; auf die Knotenlinien ist dies ohne merklichen Einfluß; bei den Haupttönen, die in höherer Approximation berechnet werden, ist die Korrektion für $\mu = 0,225 + \delta\mu$ gegeben; genaue Be-

1) F. Strehlke, Pogg. Ann. 95. p. 594. 1855.

2) J. Zeissig, Inaug.-Diss.; Wied. Ann. 64. p. 360. 1898.

obachtung der Verhältnisse der Schwingungszahlen können in der Tat dazu dienen, μ zu bestimmen.

Der Einfluß der endlichen Dicke h der Platte dürfte wohl erst in den Gliedern zweiter Ordnung in Betracht kommen. Da Dicke/Seite der Platte bei Strehlke = $1/70$ bis $1/40$ war, gibt dies Fehler von der Ordnung 0,0002 bis 0,0006 (Seite = 1), die nicht in Betracht kommen.

Durch die Art der Unterstützung, vor allem aber durch das Bestreichen des Plattenrandes mit dem Bogen, wird, wie Lord Rayleigh (l. c.) hervorhebt, die Bewegung zu einer nicht ganz freien, was sowohl auf die Lage der Knotenlinien wie auch auf die Tonhöhe von Einfluß sein kann. Endlich sind diese Bewegungen stark gedämpft, vor allem durch die Fortleitung des Schalles durch die Luft, zum Teil auch durch innere Reibung: auch hierin liegt eine Abweichung vom theoretischen Ansatz, die aber wohl in entgegengesetztem Sinne wirkt wie der Einfluß des angelegten Bogens, so daß sich beide Fehlerquellen zum Teil kompensieren dürften.

Die Klangfiguren quadratischer Platten mit freien Rändern.

Im folgenden sind die Formeln für die Eigenschwingungen, die sich auf Grund der mitgeteilten Methode ergeben, zusammengestellt und mit den Beobachtungen von Strehlke verglichen.¹⁾ Bei den höheren Eigenschwingungen, wo keine genauen Messungen vorliegen, sind die angenäherten Formeln (I) p. 739 zugrunde gelegt; der Fehler (1–2 Proz.) ist bei dem Maßstab der Figuren bedeutungslos, und bei den mannigfachen Schwierigkeiten und Fehlerquellen der experimentellen Herstellung der Figuren dürften die hier gegebenen die Wahl der Unterstützungsstellen und somit die experimentelle Darstellung wesentlich erleichtern.

Die im folgenden mitgeteilten 46 Klangfiguren erschöpfen ungefähr das, was ohne allzugroße Schwierigkeit experimentell erreicht werden kann; sie sind von Chladni in seiner Akustik

1) Die Ausdrücke für w sind auf drei Stellen genau, doch wird die vierte Stelle geführt, um eine Anhäufung von Fehlern zu vermeiden, die die dritte Stelle stark beeinflussen könnten.

zum größten Teil gegeben worden, jedoch sind die Zeichnungen meist nur ziemlich roh, wie schon der Vergleich mit Strehlke zeigt; und es sind Töne als doppelt und ineinander transformierbar bezeichnet, die es nur durch die Methode der Herstellung geworden sind; dementsprechend sind diese Figuren stark verzerrt.

Für die Doppeltöne wären an und für sich unendlich viele Figuren möglich. Den Ausdrücken $u_m(x)u_n(y) \pm u_n(x)u_m(y)$ entsprechen hier zwei Figuren, die auseinander durch Drehung um 90° entstehen; den einzelnen Schwingungen $u_m(x)u_n(y)$ Linien, die angenähert parallel zu den Seiten verlaufen, und deren Lage den Wurzeln von $u_m(x) = 0$ bzw. $u_n(y) = 0$ entspricht; sie schneiden also jede Parallele zur x -Achse (bzw. zur y -Achse) in Punkten, die genau so liegen wie die n (bzw. m) Knotenpunkte der n^{ten} (bzw. m^{ten}) Schwingung eines Stabes von gleicher Länge mit freien Enden. Für jeden Doppelton wird eine Figur, die $u_m(x)u_n(y) - u_m(y)u_n(x) = 0$ entspricht, und eine solche, die $u_m(x)u_n(y) = 0$ entspricht, gegeben. Wie man die Schar der unsymmetrischen, der allgemeinen Formel

$$A u_m(x)u_n(y) + B u_n(x)u_m(y) = 0$$

entsprechenden Figuren ihrem ungefähren Verlauf nach daraus herstellen kann, ist oft für den Fall von Membranen usw. beschrieben worden; da für jeden Ton diese Figuren sämtlich durch gewisse feste Punkte, die *Pole* der Figur gehen müssen, wird ihre Konstruktion dadurch auch erleichtert. Diese Pole sind (in erster Annäherung) die Nullstellen der Gleichungssysteme $u_m(x) = 0$, $u_m(y) = 0$ und $u_n(x) = 0$, $u_n(y) = 0$. Ihre Lagen sind also auch mit denen der Knotenpunkte freier Stäbe identisch.

Die Figuren sind zunächst nach den Symmetrien der Schwingung geordnet; innerhalb jeder Abteilung nach der Tonhöhe. Es sind angegeben die Formel für w , der Wert von λ für $\mu = 0,225$ (Glas) und die Korrektion dieses Wertes für $\mu = 0,225 + \delta\mu$ (wo $\delta\mu$ klein ist); letztere allerdings nur bei den genau berechneten λ , wo sie allein einen Sinn hat.

Aus dem schon besprochenen Sturm-Liouville'schen Satz, daß ein Ausdruck der Form $A u_m(x) + B u_n(x)$, wo $m \geq n$

ist, höchstens m und mindestens n Wurzeln hat, folgt, daß eine Parallele zu einer Seite des Quadrats die durch $u_m(x)u_n(y) \pm u_n(y)u_m(x) = 0$ gegebene Figur in höchstens m und mindestens n Punkten schneidet. Die Korrekturen, die die höhere Approximation einführt, sind zu klein, um hieran etwas zu ändern.

Ist (Vorzeichen +) die Diagonale $x = y$ keine Knotenlinie, so wird sie von Knotenlinien (und zwar senkrecht) geschnitten in den Punkten, deren Koordinaten $x = y$ die Wurzeln von $u_m(x) = 0$ und $u_n(x) = 0$ sind, also in $n + m$ Punkten, deren Abszissen und Ordinaten wieder den Knotenpunkten schwingender Stäbe entsprechen. Auf scheinbare Ausnahmen, die durch nahe Koinzidenz zweier Wurzeln entstehen, wird unten hingewiesen.

Ist das Vorzeichen — genommen, so gehört stets die Diagonale $x = y$ zur Klangfigur. Sind dann n und m beide gerade oder ungerade, so gilt gleiches von der zweiten Diagonale. Wenn nicht, so liegt ein Doppelton vor, der sich somit durch seine geringere Symmetrie kennzeichnet.

Sind m und n ungerade, so gehören die beiden Koordinatenachsen (Seitenhalbierenden) zur Figur. Diese Sätze ließen sich leicht vermehren; sie gestatten es, zu einer gegebenen Klangfigur die zugehörigen Indizes m, n zu finden.

Es ist im folgenden wieder abkürzend $u_m = u_m(x)$, $v_n = u_n(y)$ gesetzt, wo die $u_n(x)$ die durch (24), (25) p. 752 gegebenen Funktionen sind; die x -Achse ist nach rechts gelegt, die y -Achse nach oben, durch den Mittelpunkt des Quadrats parallel den Seiten. Längeneinheit ist die halbe Seitenlänge. Wegen der Symmetrien hat man beim Vergleich mit der Erfahrung nur positive x und y zu berücksichtigen.

A. Lösungen, die in x und y ungerade und symmetrisch sind.

I. Grundton. $\lambda = 12,43 - 18,0 \delta \mu$.

$$\begin{aligned} w = & u_1 v_1 + 0,0394(u_1 v_3 + v_1 u_3) \\ & - 0,0040 u_3 v_3 - 0,0034(u_1 v_5 + u_5 v_1) \\ & + 0,0011(u_3 v_5 + u_5 v_3) - 0,0019 u_5 v_5. \end{aligned}$$

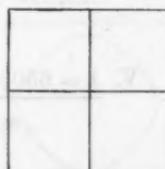


Fig. 1.

II. $\lambda = 378 - 57 \delta \mu$.

$$\begin{aligned} w = & -0,075 u_1 v_1 + (u_1 v_3 + u_3 v_1) \\ & + 0,173 u_3 v_3 + 0,045 (u_1 v_5 + u_5 v_1) \\ & - 0,015 (u_3 v_5 + u_5 v_3) - 0,029 u_5 v_5. \end{aligned}$$

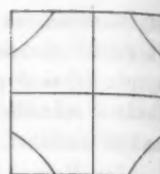


Fig. 2.

Es ist

y beob.:	0,530	0,578	0,630	0,690	0,752	0,819	0,898
x beob.:	0,937 _s	0,8750	0,812 _s	0,7500	0,687 _s	0,6250	0,562 _s
x ber. - x beob.:	-0,003	-0,002	0,000	-0,001	-0,000 _s	0,000	0,000

Nach der Formel $u_1 v_3 + u_3 v_1 = 0$ ergeben sich die Koordinaten der Punkte, in denen diese Kurven die Diagonalen schneiden, zu $x = y = 0,736$ (beob. 719); die der Randpunkte der Kurven: $x = 1$, $y = 0,533$ (beob. 0,487). Da die Seite gleich 2 ist, würde die angenäherte Formel für die Kurve Fehler von 0,8 bis 2,2 Proz. der Seite geben, was im Maßstab der Zeichnung schon kaum zu bemerken wäre — geschweige die nach der genauen Formel erhaltenen Fehler.

III. $\lambda = 1554$.

$$\begin{aligned} w = & 0,009 u_1 v_1 - 0,075 (u_1 v_3 + v_1 u_3) \\ & + u_3 v_3 - 0,057 (u_1 v_5 + u_5 v_1) \\ & + 0,121 (u_3 v_5 + u_5 v_3) - 0,007 u_5 v_5. \end{aligned}$$

Messungen fehlen.

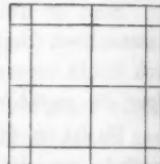


Fig. 3.

IV. $\lambda = 2945$.

$$w = u_1 v_5 + u_5 v_1.$$

Diese Figur fehlt bei Chladni.

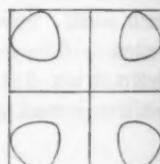


Fig. 4.

V. $\lambda = 6303$.

$$w = u_3 v_5 + u_5 v_3.$$

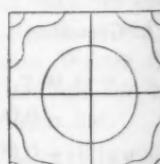


Fig. 5.

Zwei Schwingungsfiguren

VI. $\lambda = 13674$.

$$w = u_5 v_5.$$

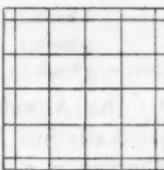


Fig. 6.

B. Lösungen, die in x und y ungerade und antisymmetrisch sind.

I. $\lambda = 316,1 - 270 \delta \mu$.

$$w = u_1 v_3 - v_1 u_3 + 0,0002(u_1 v_5 - v_1 u_5) \\ + 0,0033(u_3 v_5 - v_3 u_5).$$

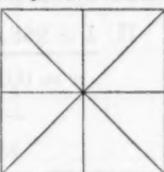


Fig. 7.

II. $\lambda = 2713$.

$$w = u_1 v_5 - v_1 u_5.$$

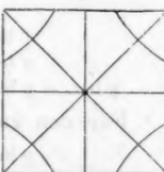


Fig. 8.

III. $\lambda = 5570$.

$$w = u_3 v_5 - v_3 u_5.$$

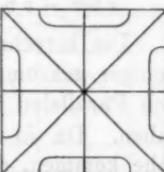


Fig. 9.

C. Lösungen, die in x und y gerade und symmetrisch sind.

Die Klangfiguren dieser und der folgenden Abteilung erscheinen besonders leicht und es können besonders viele Overtöne zur experimentellen Darstellung gebracht werden.

I. $\lambda = 35.73 + 20,8 \delta \mu$.

$$w = u_0 v_2 + u_2 v_0 - 0,0238 u_3 v_2 \\ + 0,0130(u_0 v_4 + v_0 u_4) \\ + 0,0026(u_2 v_4 + v_2 u_4) \\ + 0,0016 u_4 v_4.$$

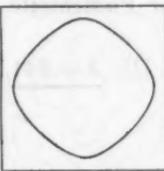


Fig. 10.

x beob.:	0,000	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500
y beob.:	0,840	0,829	0,796	0,744	0,675	0,589
y ber. - y beob.:	+0,003	+0,003	+0,003	+0,003	+0,003	+0,004

Die Abweichung ist offenbar einem der besprochenen, systematischen Versuchsfehler zuzuschreiben. Die erste Annäherung $u_0 v_3 + v_0 u_3$ ergibt für die Schnittpunkte mit den Achsen die Koordinaten 0,830 (beob. 0,839); mit der Diagonale 0,552 (beob. 0,546).

II. $\lambda = 266,0 - 274 \delta \mu$.

$$\begin{aligned} w &= 0,0122(u_0 v_2 + v_0 u_2) + u_3 v_3 \\ &\quad - 0,0188(u_0 v_4 + v_0 u_4) \\ &\quad + 0,0880(u_4 v_2 + v_4 u_2) \\ &\quad - 0,0044 u_4 v_4. \end{aligned}$$

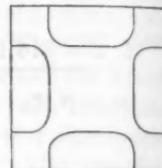


Fig. 11.

x beob.:	0,100	0,200	0,300	0,400
y beob.:	0,538	0,534	0,538	0,546
y ber. - y beob.:	-0,003	-0,003	-0,004	-0,005

Für den zweiten Teil jedes der Kurvenstücke ist:

y beob.:	0,600	0,700	0,800	0,900
x beob.:	0,495	0,517	0,524	0,528
x ber. - x beob.:	+0,005	+0,005	-0,004	-0,006

Die berechnete Kurve ist in den fast geradlinigen Teilen weniger gekrümmt als die beobachtete. Aus $w = u_2 v_2$ würden sich Parallelen zu den Achsen mit x bzw. $y = 0,551$ ergeben haben. Da in den Punkten der Kurven, wo sie sich sehr nahe kommen, die Amplitude gering bleibt, der Sand also in indifferentem Gleichgewicht sich befindet, wenn nicht sehr sorgfältig operiert wird, so wird meist die Figur als aus vier Geraden bestehend erscheinen, wie auch Chladni sie angibt; an den Schnittpunkten wird sie undeutlich sein. Der Fehler der ersten Annäherung in den geradlinigen Teilen beträgt 1 Proz. der Plattenseite.

III. $\lambda = 941$.

$$w = u_0 v_4 + v_0 u_4.$$

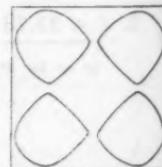


Fig. 12.

IV. $\lambda = 2020$.

$$w = u_2 v_4 + v_2 u_4.$$

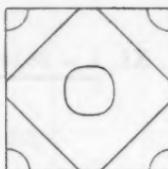


Fig. 13.

V. $\lambda = 5480$.

$$w = u_4 v_4.$$

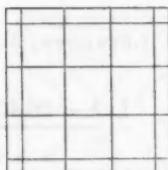


Fig. 14.

VI. $\lambda = 5640$.

$$w = u_0 v_6 + v_0 u_6$$

(von Chladni nicht beobachtet).

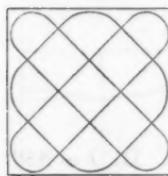


Fig. 15.

VII. $\lambda = 7840$.

$$w = u_2 v_6 + v_2 u_6.$$

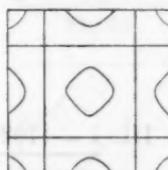


Fig. 16.

Die nahe Koinzidenz der Wurzeln $x = 0,552$ von $u_3 = 0$ und $x = 0,544$ von $u_6 = 0$ bedingt hier und in Fig. 23 die nahezu geraden Linien, und die scheinbaren Ausnahmen von den p. 775 gegebenen Sätzen.

VIII. $\lambda = 15120$.

$$w = u_4 v_0 + v_4 u_0.$$



Fig. 17.

XI. $\lambda = 28740$.

$$w = u_6 v_6$$

(fehlt bei Chladni).

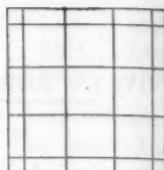


Fig. 18.

D. Lösungen, die in x und y gerade und antisymmetrisch sind.I. $\lambda = 26,40$.

$$w = u_0 v_2 - v_0 u_2$$

$$- 0,0129 (u_0 v_4 - v_0 u_4)$$

$$- 0,0045 (u_2 v_4 - v_2 u_4).$$

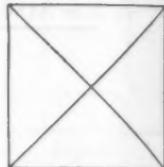


Fig. 19.

II. $\lambda = 886$.

$$w = u_0 v_4 - v_0 u_4.$$

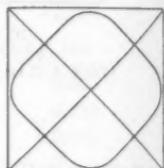


Fig. 20.

III. $\lambda = 1702$.

$$w = u_2 v_4 - v_2 u_4.$$

Die Figur stimmt auf weniger als 1 Proz.
mit Strehlkes Messungen.

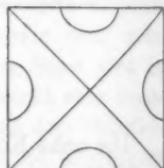


Fig. 21.

IV. $\lambda = 5500$.

$$w = u_0 v_6 - v_0 u_6$$

(fehlt bei Chladni).

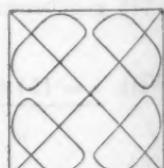


Fig. 22.

V. $\lambda = 7310$.

$$w = u_2 v_6 - v_2 u_6.$$

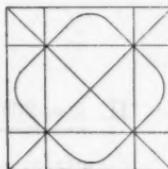


Fig. 23.

VI. $\lambda = 13840$.

$$w = u_4 v_6 - v_4 u_6.$$

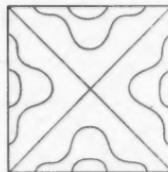


Fig. 24.

E. Doppeltöne.

I. $\lambda = 80,8 - 73 \delta \mu$.

$$\begin{aligned} w(x, y) = & u_1 v_3 - 0,0682 u_3 v_0 \\ & + 0,0760 u_3 v_2 + 0,0260 u_1 v_4 \\ & + 0,0073 u_5 v_0 - 0,0027 u_3 v_4 \\ & - 0,0112 u_5 v_3 + 0,0030 u_5 v_4. \end{aligned}$$

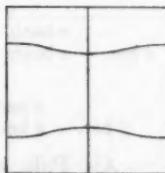


Fig. 25.

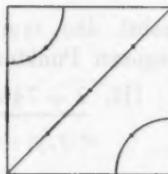


Fig. 26.

Die allgemeine Formel ergibt sich hieraus (wie bei allen Doppeltönen)

$$A w(x, y) + B w(x, y).$$

Die erste Figur (25) entspricht $B = 0$; die zweite (26) $B = -A$.

Pole: $x = y = 0$; $\pm x = 0,522 = \pm y$ (beob.); die berechneten Pole liegen auf der Diagonale um 0,001 mehr nach außen. (Vgl. Fig. 26.)

II. $\lambda = 237,1$.

$$\begin{aligned} w(x, y) = & + 0,0678 u_1 v_2 + u_3 v_0 \\ & - 0,0150 u_3 v_2 + 0,0355 u_1 v_4 \\ & + 0,0000 u_5 v_0 + 0,0100 u_3 v_4 \\ & - 0,0007 u_5 v_2 + 0,0016 u_5 v_4. \end{aligned}$$

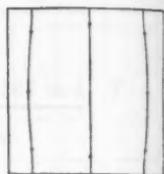


Fig. 27.

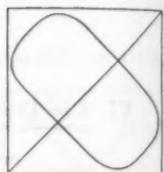


Fig. 28.

Für die annähernd parallel den Seiten verlaufenden Kurven in Fig. 27 findet sich

$y:$	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500
x beob.:	0,758	0,753	0,746	0,738	0,730
x ber. - x beob.:	-0,0045	-0,0055	-0,0045	-0,003	-0,0005
$y:$	0,600	0,700	0,800	0,900	
x beob.:	0,722	0,717	0,716	0,717	
x ber. - x beob.:	-0,0005	+0,0005	+0,0005	+0,0010	

Als Pole sind beobachtet

$$\begin{aligned} y = 0, & \quad x = 0,760, \quad \text{ber. } 0,761, \\ y = x = 0,716, & \quad \text{ber. } 0,722, \end{aligned}$$

nebst den symmetrischen, in den anderen Quadranten gelegenen Punkten. (Vgl. Fig. 27).

III. $\lambda = 746$.

$$\begin{aligned} w(x, y) = & - 0,0709 u_1 v_2 + 0,0214 u_3 v_0 \\ & + u_3 v_2 - 0,1260 u_1 v_4 \\ & - 0,0038 u_5 v_0 + 0,1234 u_3 v_4 \\ & - 0,0095 u_5 v_2 - 0,0100 u_5 v_4. \end{aligned}$$

Strehlke gibt die Pole an, die jedoch mit dieser Formel nur auf 1 Proz. stimmen, was sich wohl aus dem Umstand erklärt, daß sie in einer Zone nahezu indifferenten Gleichgewichtes liegen (in Fig. 29 dort, wo sich die Kurvenzweige einander nähern).

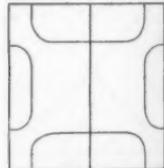


Fig. 29.

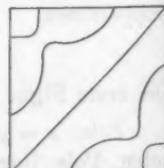


Fig. 30.

IV. $\lambda = 1131$.

$w = u_1 v_4,$

$w = u_1 v_4 - u_4 v_1.$

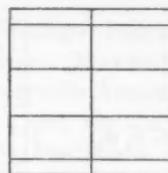


Fig. 31.

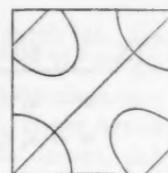


Fig. 32.

V. $\lambda = 2497$.

$w = u_5 v_0,$

$w = u_5 v_0 - u_0 v_5.$

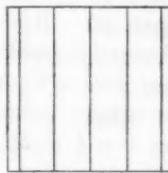


Fig. 33.

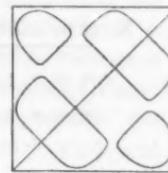


Fig. 34.

VI. $\lambda = 3240$.

$w = u_3 v_4,$

$w = u_3 v_4 - u_4 v_3.$

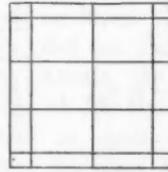


Fig. 35.

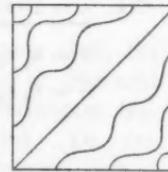


Fig. 36.

VII. $\lambda = 3927$.

$w = u_5 v_3,$

$w = u_5 v_3 - u_2 v_5.$

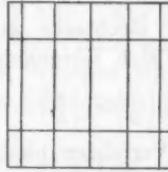


Fig. 37.

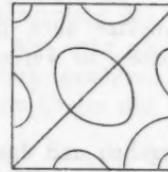


Fig. 38.

VIII. $\lambda = 9030$.

$w = u_5 v_4,$

$w = u_5 v_4 - v_5 u_4.$



Fig. 39.

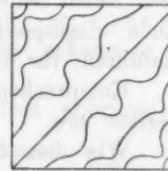


Fig. 40.

IX. $\lambda = 6036$.

$$w = u_1 v_6,$$

$$w = u_1 v_6 - v_1 u_6.$$

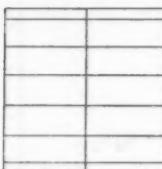


Fig. 41.



Fig. 42.

X. $\lambda = 10380$.

$$w = u_3 v_6,$$

$$w = u_3 v_6 - v_3 u_6.$$

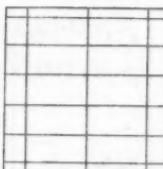


Fig. 43.

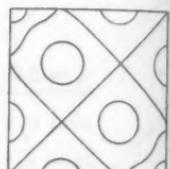


Fig. 44.

XI. $\lambda = 20400$.

$$w = u_5 v_6,$$

$$w = u_5 v_6 - v_5 u_6.$$

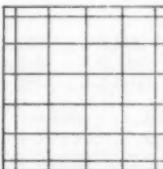


Fig. 45.



Fig. 46.

Schlußbemerkungen.

Es braucht wohl kaum betont zu werden, daß dieselben Ansätze auch für Rechtecke gelten; sind a, b deren halbe Seiten, so werden sich Lösungen der Form

$$u_m \left(\frac{x}{a} \right) u_n \left(\frac{y}{b} \right) \pm u_n \left(\frac{x}{a} \right) u_m \left(\frac{y}{b} \right)$$

ergeben und das Verfahren bleibt im übrigen ungeändert.

Ist eine Seite des Rechtecks eingespannt, die übrigen frei, so wird man dementsprechend für die Richtung x der zwei freien Seiten diejenigen Funktionen, die einem an einem Ende eingespannten, am anderen freien Stabe entsprechen, einführen; für die zweite Richtung bleiben die u_m anwendbar.

Entsprechendes gilt für die ringsum eingespannten Platten usw.

Wie dieselbe Methode Gleichsgewichtsprobleme zu behandeln gestattet, habe ich in der eingangs zitierten Arbeit

gezeigt. Wird z. B. eine rechteckige Platte durch an den Rändern angreifende Kräfte gebogen (Maxwell), so ist für die transversale Deformation $w(x, y)$ derselbe Ansatz (Entwicklungen nach $u_m(x/a)u_n(y/b)$) zu machen, wie wir ihn in dieser Arbeit benutzt haben; die Koeffizienten bestimmen sich daraus, daß die potentielle Energie — sie ist, bis auf einen Faktor, durch unser Integral J gegeben — plus dem die Arbeit der Kräfte für ein kleines w ausdrückenden Randintegral, nach Einführung des Ansatzes, möglichst klein sein soll. Da das Randintegral w nur linear enthält, ergeben sich diesmal lineare, nicht homogene Gleichungen für die Koeffizienten. Für eine quadratische Platte und geeignete symmetrische Kräfte erhält man wieder die Gleichungen (54) p. 763, wenn darin $\lambda = 0$ gesetzt wird und die linken Seiten (Null) durch bestimmte Zahlwerte ersetzt werden. Die einmalige Aufstellung des Schemas (54) genügt also, um eine ganze Reihe von Gleichgewichtsproblemen bezüglich quadratischer Platten einfach zu lösen.

Es ist oben bemerkt worden, daß ein Polynom stets, bei jeder Begrenzung, als möglicher Ansatz für w in Betracht kommt, wobei nur fraglich bleibt, ob bei der verlangten Genauigkeit die Rechenarbeit nicht zu groß wird. Da der Eigenwert des Fundamentaltones, λ_0 , dem Minimum von J entspricht, so wird im ganzen bei jeder Approximation, wenn es sich um den Grundton handelt, λ das durch die Methode am genauesten gegebene Element sein. Zur Berechnung des Grundtones aus den Konstanten der Platte wird also sehr oft der Ansatz eines Polynoms mit wenigen Gliedern genügen. So entspricht der Symmetrie des Grundtones beim Kreise der allgemeinste Ansatz

$$(a) \quad w = xy[a + b(x^2 + y^2) + c x^2 y^2 + d(x^4 + y^4) + \dots],$$

wobei die x - und y -Achse die Knotenlinien der Klangfigur bilden. Trägt man dies in das über den Kreis vom Radius $R = 1$ erstreckte Integral J (Gleichung (7) p. 745) ein, so ergibt unsere Methode ohne weiteres für λ_0 folgende sukzessive Approximationen:

Wenn man Formel (a) mit dem ersten Glied abbricht ($b = c = d = \dots = 0$):

$$\lambda_0 = \frac{48(1 - \mu)}{R^4} = 32 \quad \text{für } \mu = \frac{1}{3} \quad \text{und } R = 1.$$

Bei zwei Gliedern (λ_0) Wurzel einer Gleichung zweiten Grades)

$$\lambda_0 = 27,794,$$

während aus Kirchhoffs Rechnungen sich ergibt

$$\lambda_0 = 27,574.$$

Der Fehler der Tonhöhe, die $\sqrt{\lambda_0}$ proportional ist, ist somit schon in zweiter Annäherung nur $\frac{1}{2}$ Proz., also an der Grenze des Beobachtbaren.

Ebenso elementare Rechnungen ergeben die Grundtöne und selbst die ersten Obertöne des Dreiecks, Fünfecks, Sechsecks usw., und überhaupt irgendwelcher durch gerade Linien und Kreisbögen begrenzter Figuren.

Göttingen, Januar 1909.

(Eingegangen 14. Januar 1909.)

elekt
karz
den
Arbei
beson
Maxin
forde
der
der
lytisc
geruf
bildet
Poren
Metal
in ihr
hältni
Ventil
hohes
freien
ich, a
die in
viel h
die fr
E
der G
Formi

1)
p. 226;
chemie

*3. Über die Maximalspannung der elektrolytischen Ventilzellen;
von Günther Schulze.*

Nachdem ich in meinen bisherigen Arbeiten¹⁾ über die elektrolytische Ventilwirkung versucht hatte, ihre Ursachen klarzulegen und ihre verschiedenen Erscheinungsformen bei den einzelnen Metallen zu beschreiben, möchte ich in dieser Arbeit das Verhalten und die mutmaßlichen Ursachen einer besonderen Eigentümlichkeit der Ventilwirkung, nämlich der Maximalspannung, behandeln. Dabei erscheint es zugleich erforderlich, auf die Anschauung, die ich mir von den Ursachen der Ventilwirkung gebildet habe, und auf die Vorgänge bei der Formierung der Ventilzellen näher einzugehen.

Diese Anschauung besteht in folgendem. Die elektrolytische Ventilwirkung wird nicht durch die feste Haut hervorgerufen, die sich auf den Ventilmetallen bei der Formierung bildet, sondern durch eine viel dünnerne Gasschicht, die in den Poren der festen Haut entsteht und den Elektrolyten vom Metall trennt. Ist das Ventilmittel Kathode, so können die in ihm enthaltenen freien Elektronen diese Gasschicht bei verhältnismäßig geringem Spannungsgefälle durchdringen; ist das Ventilmittel Anode, also der Elektrolyt Kathode, so ist ein hohes Spannungsgefälle erforderlich, weil im Elektrolyten keine freien Elektronen vorhanden sind. Vielmehr müssen, so schloß ich, an ihre Stelle die negativen elektrolytischen Ionen treten, die in der Gasschicht infolge ihrer viel größeren Masse einen viel höheren Widerstand erfahren, als in der anderen Richtung die freien Elektronen. Daher die Ventilwirkung.

Ehe wir uns von der Entstehung der festen Haut und der Gasschicht in ihr ein Bild machen, wollen wir einige Formierungsversuche betrachten.

1) G. Schulze, Ann. d. Phys. 21. p. 929. 1906; 22. p. 543; 23. p. 226; 24. p. 43. 1907; 25. p. 775; 26. p. 372. 1908; Zeitschr. f. Elektrochemie 25. p. 333. 1908.

Blank polierte Aluminiumstäbe von 4 mm Durchmesser und 5 qcm freier Oberfläche wurden mit Hilfe einer Gummidichtung von unten her in Zellen eingeführt, die mit 0,1 äquivalent normaler $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$ -Lösung gefüllt waren und so lange eingeschaltet wurden, bis der Spannungsverlust an ihnen auf 400 Volt gestiegen war. Gleichzeitig wurde die von der Aluminumanode entwickelte Sauerstoffmenge aufgefangen und gemessen. Nach dem Ausschalten wurden die Zellen gespült, getrocknet, mit Quecksilber gefüllt und durch eine Kapazitätsmessung die auf die Dielektrizitätskonstante 1 reduzierte Dicke der festen Haut δ/ϵ (δ Dicke, ϵ Dielektrizitätskonstante) festgestellt. Die der Spannung 400 Volt entsprechende (reduzierte) Dicke der Gasschicht wurde aus der durch frühere Versuche erhaltenen Kurve entnommen. Die Dielektrizitätskonstante kann man für beide Fälle als annähernd gleich ansehen, so daß die unten angegebenen Zahlen eine unmittelbare Vergleichung der beiden Schichtdicken gestatten.

Die feste Haut besteht bei Verwendung von Aluminium in einer Lösung von Borax aus Aluminiumoxyd, nicht aus Aluminiumborat. Dieses folgt daraus, daß einerseits chemisch kein Bor in der festen Haut gefunden wurde, andererseits sich die Leitfähigkeit des Elektrolyten infolge der Formierung nicht änderte, wie sie es hätte tun müssen, wenn Bor zur Bildung der festen Haut verbraucht worden wäre.

Die Ergebnisse der Messungen sind in der folgenden Tab. I zusammengestellt.

Tabelle I.

Formierung von Aluminium in 0,1 äq. n. $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$ bis 400 Volt.
(Maximalspannung nach 24 Stunden 470 Volt.)

Strom-dichte	Zur Formierung bis 400 Volt er- forderliche		Entwickelte Sauerstoff- menge	Der Elektri- zitätsmenge ent- sprechende	Dicke der	
	Zeit	Elektrizitäts- menge			festen Haut δ/ϵ	Gas- haut δ/ϵ
Amp. qem	sec	Amp.-sec qem	cem qcm	cem qcm	$\mu\mu$	$\mu\mu$
0,00154	4560	7,02	0,378	0,407	1265	58,0
0,00850	583	4,95	0,217	0,287	782	"
0,0154	300	4,62	0,245	0,268	575	"
0,0318	140	4,38	0,224	0,254	470	"

Diese Tabelle läßt erkennen, daß 1. die feste aus Aluminiumoxyd bestehende Schicht stets viel dicker ist als die Gasschicht; 2. der überwiegende Teil des Stromes zur Entwicklung entweichenden Sauerstoffs dient, wobei noch zu berücksichtigen ist, daß die unter „Entwickelte Sauerstoffmenge“ angegebenen Zahlen infolge von Ozonbildung und Lösung des Sauerstoffs im Elektrolyten zu niedrig sind.

Ferner ist für die Formierungsvorgänge wichtig, daß sich Aluminium schon bei gewöhnlicher Temperatur sehr lebhaft mit Sauerstoff verbindet. In der Luft schützt es sich nur dadurch sehr wirksam gegen Oxydation, daß sich jede neu gebildete Oberfläche sofort mit einer lückenlosen undurchlässigen Oxydhaut molekularer Dicke überzieht. So täuscht es Reaktionsträgheit vor.

Auch die frisch polierte Aluminiumelektrode, die wir formieren wollen, ist mit einer solchen molekularen Oxydschicht überzogen und es liegt nahe anzunehmen, daß diese Oxydschicht auch während der Formierung stets vorhanden ist.

Wir können uns also von einer formierten Aluminiumelektrode das in Fig. 1 schematisch und stark vergrößert wiedergegebene Bild machen.

δ' ist die ganze Dicke der festen porösen Schicht. Sie besteht aus folgenden Teilen:

1. α , der das Aluminium stets bedeckenden lückenlosen Oxydschicht.

2. β , der Gasschicht. $\alpha + \beta = \delta$ bildet die wirksame Schicht, bisher einfach Gasschicht genannt, deren relative Dicke δ/ϵ durch Kapazitätsmessungen an der mit Elektrolyt gefüllten Zelle ermittelt werden kann. Da α gegen β sehr gering ist (Größenordnung Zehntel $\mu\mu$ gegen Zehner $\mu\mu$), so können wir es im allgemeinen außer Betracht lassen und δ einfach als Gasschicht bezeichnen.

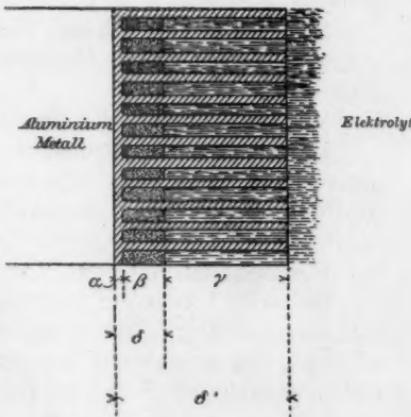


Fig. 1.

3. γ , dem vom Elektrolyten erfüllten Teile der festen Schicht. Er hat einen wesentlich höheren Widerstand als der Elektrolyt, aber sein Widerstand kommt gegen den der Gasschicht nicht in Frage.

Mit Hilfe dieses Bildes der Schicht wollen wir versuchen, uns eine Anschauung davon zu bilden, wie sie entsteht und auf welche Weise die Elektrizität sie durchströmt. Wenn wir eine frisch polierte Aluminiumelektrode zur Formierung in den Elektrolyten eintauchen, so befindet sich auf ihr zunächst nur die Schicht α , die zwar isoliert, aber infolge ihrer molekularen Dicke nur minimale Spannungen aushalten kann. Es liegt nahe anzunehmen, daß sie beim Einschalten des Stromes von den herandrängenden Anionen oder einem leicht abspaltbaren Teile derselben, dem Sauerstoff, überall durchschlagen wird; daß die hindurchgedrungenen Sauerstoffatome ihre Ladung an das Aluminium abgeben und mit ihm ihrerseits eine Oxydschicht bilden, die von den nachdringenden Ionen wieder durchschlagen wird und so fort.

Es leuchtet ein, daß auf diese Weise eine von zahllosen feinsten Röhrchen durchsetzte sehr feinporöse feste Oxydschicht entsteht.

Wie entsteht aber die Gasschicht?

Ihre immerhin hypothetische Existenz hier abzulehnen, nützt nichts, denn dann lautet die Frage: Wie entsteht die sichtbare, den größten Teil des Stromes beanspruchende Gasentwickelung?

Hier sehe ich nur zwei Möglichkeiten der Erklärung.

Die erste beruht auf der Annahme, daß Aluminium in unmittelbarer Berührung mit naszierendem Sauerstoff so reaktionsfähig ist, daß es sich nur mit dem geringsten Teile desselben verbindet, während der größte Teil nach Abgabe seiner Ladung entweicht.

Eine solche dem normalen Verhalten widersprechende Reaktionsträgheit wird beispielsweise neuerdings dem Eisen zur Erklärung seiner Passivität zugeschrieben.¹⁾

Beim Aluminium erscheint eine solche Reaktionsträgheit allerdings recht unwahrscheinlich.

1) C. Fredenhagen, Zeitschr. f. phys. Chem. 63, p. 1. 1908.

Die zweite Erklärung läßt sich auf der Annahme aufbauen, daß der größte Teil der Sauerstoffionen gar nicht bis zum Aluminium gelangt, sondern seine Ladung, die negativen Elektronen, abgibt, sobald er einen hohen Widerstand und infolgedessen ein hohes Spannungsgefälle findet, und daß die Elektronen die hindernde Schicht allein durchdringen.

Obwohl meines Wissens bisher noch nicht beobachtet worden ist, daß ein elektrolytisches Ion, ohne eine Elektrode zu berühren, allein durch Spannungsgefälle gezwungen werden kann, seine Ladung abzugeben, dürfte es sich doch verlohnen, den auf dieser Vorstellung beruhenden zweiten Erklärungsversuch weiter auszubauen, da wir im folgenden manche Erscheinungen kennen lernen werden, die dafür zu sprechen scheinen, während sich die auf der Reaktionsträigkeit beruhende Erklärung nur schwer mit den Erscheinungen in Einklang bringen läßt.

Die Grenzflächen, an denen die Sauerstoffanionen einen hohen Widerstand und ein hohes Spannungsgefälle finden, sind die Grenze zwischen Gasschicht und Elektrolyt, sowie die Grenze zwischen Gasschicht und fester Oxydschicht α , und wir wollen also die Annahme machen, daß die Sauerstoffanionen, wenn sie an die Grenze zwischen Elektrolyt und Gasschicht gelangen, zum größten Teile ihre Elektronen abgeben. Letztere fliegen zum Aluminium und der Sauerstoff wird frei. Der kleinere Teil der Sauerstoffanionen, der an der erwähnten Grenze seine Elektronen nicht abgegeben hat (weil er sich in einem Zustande befand, der diese Abgabe nicht begünstigte), dringt durch die Gasschicht hindurch und gelangt an die Grenze zwischen Gasschicht und Oxydschicht α , wo er wieder einen hohen Widerstand findet. Wenn nun diese Sauerstoffionen an der ersten Grenze ihre Elektronen festhielten, weil sie sich gerade in einem Schwingungszustande befanden, der das Festhalten der Elektronen begünstigte, so wird an der zweiten Grenze wieder nur ein Teil von ihnen sich gerade in diesem Zustande befinden. Es werden sich also an der zweiten Grenze dieselben Vorgänge abspielen, wie an der ersten. Ein Teil der Sauerstoffionen wird wieder seine Elektronen abgeben, der Rest wird die Oxydschicht α durchschlagen, das Aluminium erreichen und nach Abgabe seiner

Ladung Aluminiumoxyd bilden und die feste poröse Schicht verstärken.

In der wirksamen Schicht findet also in der Richtung auf das Aluminium eine doppelte Strömung, bestehend aus Elektronen und aus Sauerstoffionen, statt und an den beiden Grenzflächen der Gasschicht wird Gas entwickelt.

Bei Beginn der Formierung ist nur die Oxydschicht α vorhanden und wird unmittelbar vom Elektrolyten begrenzt. Es wird also zunächst nur hier ein Teil des Sauerstoffs durch Elektronenabspaltung frei, welcher an der Oxydschicht haften bleibt, während zugleich die Bildung der porösen Schicht beginnt, in der dann die Gasschicht eine feste Stütze findet.

An den im folgenden angegebenen Erscheinungen wollen wir nun die beiden im vorhergehenden aufgestellten Hypothesen der Vorgänge an einer formierten Aluminiumelektrode erproben, und um einen kurzen Ausdruck zu haben, wollen wir die erste auf der Reaktionsträgheit beruhende Hypothese die „chemische“, die zweite, die sich darauf aufbaut, daß die elektrolytischen Anionen Elektronen abspalten können, wenn sie einen hohen Widerstand finden, die „elektrische“ Hypothese nennen. Zunächst tritt bei der Formierung noch ein schlecht erklärbare Umstand auf, nämlich die Langsamkeit der Bildung der wirksamen Schicht, die wir nach wie vor als Gasschicht in den Poren der festen Schicht ansehen wollen. Aus der Tab. I hatten wir gesehen, daß die poröse feste Schicht wesentlich dicker ist als die Gasschicht. Also das Gerüst, dessen die Gasschicht zu ihrer Existenz bedarf, ist in ausreichendem Maße vorhanden. Man sollte meinen, daß der gesamte entwickelte Sauerstoff zur Verstärkung der Gasschicht verwandt würde. Die Tabelle zeigt aber, daß der größte Teil des entwickelten Sauerstoffs entweicht.

Wie stellen sich die beiden Hypothesen dazu? Nach der chemischen wird der Sauerstoff an der Grenze zwischen Gasschicht und Aluminium frei, während er an der Grenze zwischen Gasschicht und Elektrolyt entweicht.

Die Folge muß sein, daß die Dicke der Gasschicht zunimmt, solange innen mehr entwickelt wird als außen entweicht, abnimmt, wenn das Umgekehrte der Fall ist.

Dieses steht im Widerspruch mit der Erscheinung, daß

eine große Menge Sauerstoff nur solange entweicht, wie die Gasschicht wächst, während Strom und Gasmenge asymptotisch dem Werte Null zuzustreben scheinen, sobald man die Dicke der Gasschicht (durch Konstanthalten der Formierungsspannung) konstant hält.

So sank der Reststrom einer aus 10 Aluminiumplatten von 10×17 cm bestehenden Zelle, die wochenlang an 110 Volt lag, auf $0,0005$ Amp. (oder $1,47 \cdot 10^{-7}$ Amp./qcm) und der größte Teil dieses Stromes ging anscheinend nicht auf dem normalen Wege in das Aluminium, sondern durch die mit Gummi isolierten Einführungsstellen der Platten, an denen sich Anfressungen gebildet hatten.

Nach der elektrischen Hypothese wird Sauerstoff sowohl an der Grenze zwischen Gasschicht und Elektrolyt als auch an der Grenze zwischen Gasschicht und Oxydschicht α entwickelt. Wenn wir nun annehmen, daß an der ersten Grenze sehr viel mehr Sauerstoff entwickelt wird als an der zweiten und daß der an der ersten Grenze entwickelte Sauerstoff vollständig entweicht, während der an der inneren Grenze freigesetzte Sauerstoff vollständig zur Verstärkung der Gasschicht dient, so leuchtet ein, daß die Gasschicht bei der Formierung unter starker Gasentwicklung nur langsam wächst, während sie fast überhaupt kein Gas verbraucht, wenn ihre Dicke konstant erhalten wird.

In meiner zweiten Arbeit habe ich gezeigt, daß die Gasschicht einer sehr starken Molekularanziehung durch die poröse Schicht unterworfen ist, so daß sie selbst durchaus kein Bestreben zeigen wird, zu entweichen.

Daß die gesamte an der inneren Grenze der Gasschicht entwickelte Sauerstoffmenge zur Verstärkung der Gasschicht benutzt wird, kann man sich leicht vorstellen.

Daß aller an der äußeren Grenze der Gasschicht freigesetzte Sauerstoff entweicht, wird wahrscheinlich, wenn man berücksichtigt, daß ein Atom beim Abspalten eines Elektrons einen kräftigen Rückstoß empfängt, der es in entgegengesetzter Richtung wie das Elektron fortschleudert, wie neuere Versuche¹⁾ gezeigt haben.

1) O. Hahn u. E. Rutherford, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 1909.
Annalen der Physik. IV. Folge. 28.

Wir sehen also, daß die elektrische Hypothese die Formierungsvorgänge bedeutend besser erklärt als die chemische.

Nunmehr wollen wir uns den Erscheinungen der Maximalspannung zuwenden und uns einige Versuche ansehen, die sich darauf beziehen.

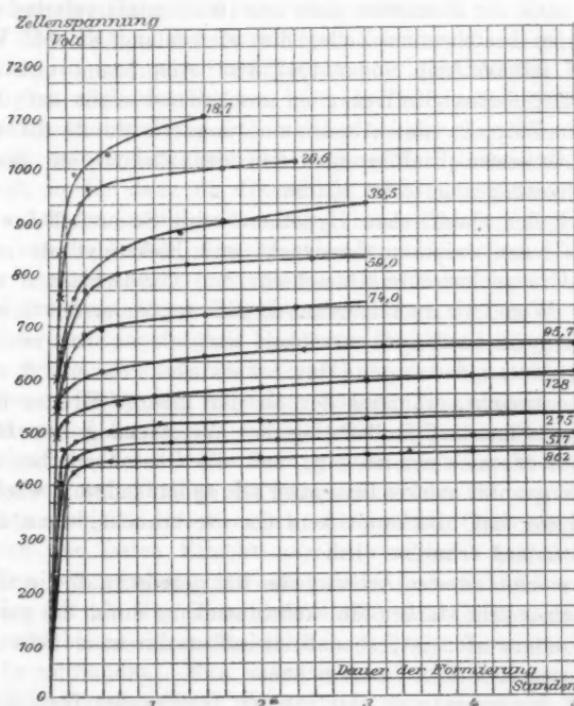


Fig. 2. Formierung von Aluminiumanoden von 5 qcm Oberfläche in $\text{K}_2\text{B}_2\text{O}_4$ -Lösung verschiedener Konzentration. Stromdichte 0,01 Amp./qcm, nach Überschreitung des Knies der Kurven auf 0,002 Amp./qcm verringert. Die beigezeichneten Zahlen sind die Leitfähigkeiten der Lösungen bei $18,0^\circ\text{C}$. in $10^{-5} \times$ reziproke Ohm-Zentimeter. Die \times bezeichnen den Beginn der Funkenentladung.

Aluminiumelektroden von 5 qcm Oberfläche wurden in $\text{K}_2\text{B}_2\text{O}_4$ -Lösungen verschiedener Konzentration mit einer Stromstärke von 0,05 Amp. formiert. Die die Elektroden enthaltenden in Kältemischung getauchten Zellen befanden sich in einem

dunklen Raume, so daß die optischen Erscheinungen gut beobachtet werden konnten. Als Maß der Konzentration der Lösungen wurde die Leitfähigkeit ermittelt, zumal da die Ionenkonzentration und nicht die Konzentration des nicht ionisierten Teiles der Lösung die Erscheinung zu beeinflussen scheint.

Der Anstieg der Spannung mit der Dauer der Einschaltung ist in Fig. 2, der wichtigste Abschnitt der Formierung, der Beginn der Funkenentladung in Fig. 3 wiedergegeben.

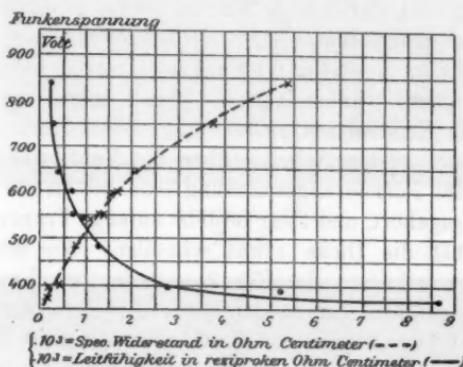


Fig. 3. Beginn der Funkenentladung bei der Formierung von Al in $K_2B_2O_4$ -Lösungen verschiedener Konzentration als Funktion der Leitfähigkeit der Lösungen (—) bzw. des spezifischen Widerstandes der Lösungen (---). Stromdichte 0,01 Amp./qcm.

Während der Formierung leuchtet die Anode in einem ganz gleichmäßigen bleichen grünlichweißen Lichte, das bei ca. 100 Volt Zellenspannung für ein nicht ausgeruhtes Auge im Dunklen sichtbar wird. Seine Helligkeit steigt mit der Spannung und erreicht beim Beginne der Funkenentladungen ihren größten Betrag, um von da an in derselben Weise abzunehmen, wie die Steigung der Spannungskurve abnimmt. Bei höheren Konzentrationen, bei denen die Formierungskurve schon nach 2 Stunden beinahe horizontal verläuft, tanzen die Funken nach dieser Zeit auf einem völlig schwarzen Grunde, während bei den hohen Verdünnungen gemäß der stärkeren Steigung der Spannungskurve der Grund nach 2 Stunden noch ziemlich hell ist.

Bei einer scharf markierten Spannung treten plötzlich zahlreiche Funken auf, die bei höheren Konzentrationen anfangs sehr fein und fast lautlos, bei höheren Verdünnungen gleich kräftig und mit lebhaft knisterndem Geräusch verknüpft sind. Sie verursachen bei gleichem Vorschaltwiderstande um so größere Spannungsschwankungen, je verdünnter die Lösung ist. Bei den größten angegebenen Verdünnungen hat man bei geringer Stromdichte gleichmäßiges Leuchten der Anode, bei Erhöhung der Stromdichte treten zunächst sehr feine nur im Dunkeln sichtbare, darauf sehr starke laute Funken hinzu, in deren Spektren die rote und grüne Wasserstofflinie scharf markiert sind.

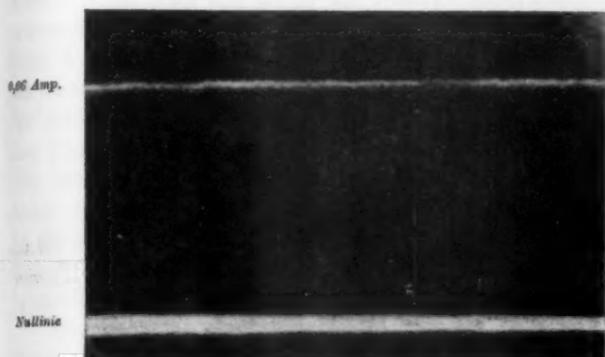
Die Spannung, bei der die Funken einsetzen, möge Funken- spannung heißen. Sie steigt, wie Fig. 3 zeigt, mit der Verdünnung des Elektrolyten an.

In meiner ersten Arbeit¹⁾ über die Ventilwirkung zeigte ich, daß jeder Formierungsspannung eine bestimmte Dicke der Gasschicht zugehört, und zwar besteht anfangs Proportionalität, später wächst die Dicke etwas schneller. Wir können also die Formierungskurven der Fig. 2 auch in irgend einem Maßstabe als ungefähre Kurven der Dicke der Gasschicht ansehen und folgern: Der Beginn der Funkenentladung ist das Signal für die Verlangsamung des Wachstums der Gasschicht, und je langsamer die Gasschicht wächst, um so mehr nimmt die Helligkeit des gleichmäßigen Leuchtens ab. Infolgedessen wurde, wenn das Knie der Formierungskurve überschritten war, der Formierungsstrom auf 0,01 Amp. verringert, da sonst die Erwärmung der Zelle zu groß wurde.

Es sind also zwei Arten von Strömung zu unterscheiden. Eine konstante, gleichmäßig über die ganze Fläche der Elektrode verteilte, die anfangs allein vorhanden ist und das gleichmäßige Leuchten der Anode und wahrscheinlich auch das Wachsen der Gasschicht verursacht und eine inkonstante aus zahlreichen Funkenentladungen bestehende, die erst bei einer bestimmten Spannung einsetzt und von da an auf Kosten der ersten Strömung immer mehr zunimmt. Es leuchtet ein, daß diese letztere Strömung zum Wachstum der Gasschicht nicht beitragen kann.

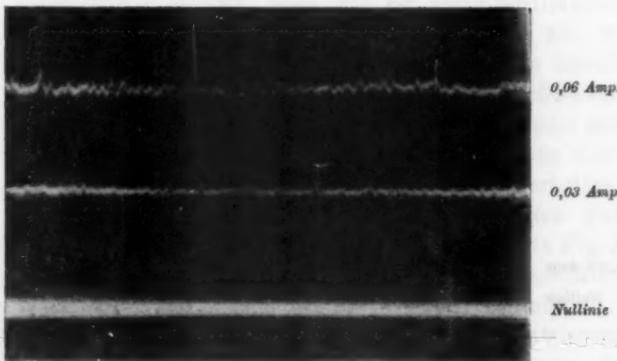
1) I. c.

Zur Verdeutlichung der beiden Strömungen wurden einige Oszillogramme, Fig. 4—7, aufgenommen. Eine Aluminium-elektrode von 30 qcm Oberfläche wurde in 0,1 äq. norm. $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$ -



Spannung 330 Volt

Fig. 4.



Spannung 400 Volt

Fig. 5.

Strom in einer Zelle aus Aluminium in 0,1 äq. norm. $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$ -Lösung. Zelle ohne Vorschaltwiderstand an einer Akkumulatorenbatterie der angegebenen Spannungen.

Lösung ohne Vorschaltwiderstand formiert, indem die Spannung der Batterie stufenweise um je 2 Volt so erhöht wurde, daß der Strom die erwünschte Stärke hatte. Wenn die Stromstärke

bei der Spannungserhöhung zu groß geworden war, wurde gewartet, bis sie wieder auf den gewünschten Wert gesunken war. Die in derselben Figur befindlichen Oszillogramme ver-

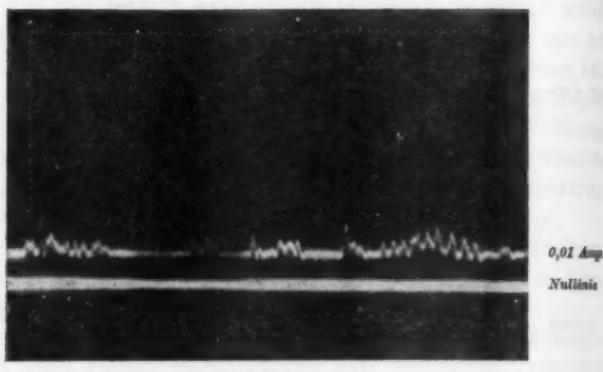


Fig. 6.

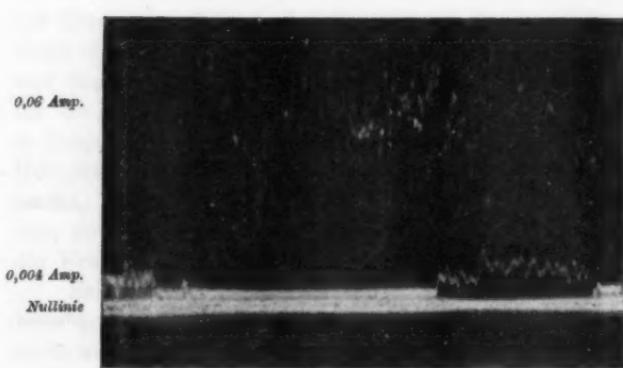


Fig. 7.

Strom in einer Zelle aus Aluminium in 0,1 äq. norm. $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$ -Lösung, Zelle ohne Vorschaltwiderstand an einer Akkumulatorenbatterie der angegebenen Spannungen.

schiedener Ströme sind nacheinander auf dieselbe Platte aufgenommen. Fig. 4 zeigt eben beginnende Funkenentladung. An der Kurve von 0,06 Amp. sind geringe Schwankungen

sichtbar, die auf zahlreiche feine Funken hindeuten. Hier überwiegt also noch die gleichmäßige Strömung. Bei 400 Volt, in der Mitte des Knies der Formierungskurve des benutzten Elektrolyten, sind die durch die Funken verursachten Stromschwankungen noch bei 0,03 Amp. deutlich. Der kontinuierliche Strom hat also bereits auf weniger als 0,03 Amp. abgenommen. Bei 498 Volt muß man den Strom auf 0,01 Amp., bei 455 Volt sogar auf 0,004 Amp. verringern, um zwischen den Funkenentladungen noch Zeiten zu erhalten, in denen nur der kontinuierliche Strom fließt. Bei 60 Milliamp. Gesamtstrom gehen hier also 4 Milliamp. als kontinuierlicher Strom, 56 Milliamp. als Funkenstrom über. Dementsprechend hat die Zunahme der Zellenspannung und der Gasschicht fast ganz aufgehört.

Die behandelten Erscheinungen stellen uns vor die Frage: Kann die Gasschicht aus irgend einem Grunde nicht mehr wachsen, wenn sie eine bestimmte Dicke erreicht hat, so daß infolgedessen das Spannungsgefälle in ihr so lange zunimmt, bis Funkenentladung eintritt; oder tritt bei einer bestimmten Spannung aus irgend einem Grunde Funkenentladung ein, so daß infolgedessen die Gasschicht nicht mehr wachsen kann?

Wenn es auch nach dem Bisherigen schon wahrscheinlich ist, daß die Funkenentladung die Ursache, das Aufhören des Wachstums der Gasschicht die Folge ist, so erscheint es doch erwünscht, dieses noch auf andere Weise bestätigt zu erhalten.

Nun kann man in stark verdünnten Elektrolyten viel dickere Gasschichten herstellen als in konzentrierten, wie Fig. 2 zeigt, und in geeigneten Elektrolyten sind diese Gasschichten nach dem Ausschalten des Stromes hinreichend beständig.

Falls also im Sinne unserer ersten Frage in konzentrierten Lösungen keine größeren Schichtdicken bestehen können als die, welche bei der Formierung in diesen Lösungen erreicht werden, so muß eine in stark verdünnter Lösung hergestellte relativ dicke Schicht, beim Ersatz der verdünnten durch eine konzentrierte Lösung sogleich auf den der konzentrierten Lösung entsprechenden Wert zurückgehen.

Dagegen wird ihre Dicke nicht zurückgehen, wenn die zweite Frage zu bejahen ist, falls die Schicht an und für sich nach dem Ausschalten beständig ist. Infolge der dann für

die hohe Konzentration künstlich vergrößerten Dicke der Gas- schicht wird die Funkenspannung höher sein, als der Konzen- tration entspricht.

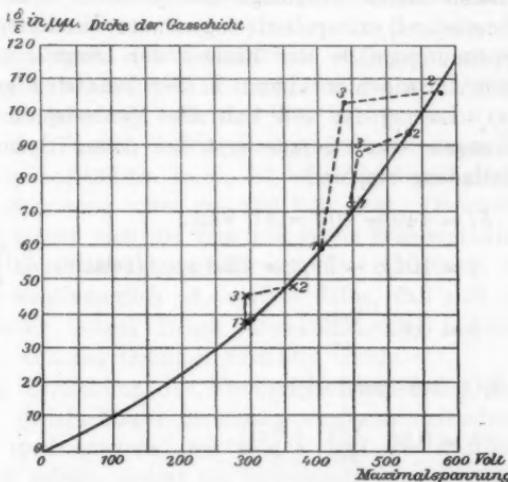
Durch Kapazitätsmessungen, die in Tab. II und Fig. 8 wiedergegeben sind, ließ sich eine Entscheidung über diese Fragen herbeiführen. Die Messungen zeigen, daß die Dicke der Gasschicht beim Einfüllen der höheren Konzentration nur

Tabelle II.

Zusammenhang zwischen Dicke der Gasschicht und Maximalspannung
 $t = 0^\circ \text{ C.}$

Versuch Nr.	Elektrolyt	Leitfähig- keit der Elektrolyte bei 18° C. $\text{Ohm}^{-1} \text{cm}^{-1}$	Maximal- spannung in Volt	Kapazität pro qem Mikrof.	Schicht- dicke δ/ε in μ
1 {	$\text{NH}_4\text{HB}_2\text{O}_4$ gesättigt	0,0210	403 Volt nach 20 st. Formierung	0,0149	59,3
2 {	$\text{NH}_4\text{HB}_2\text{O}_4$ stark verdünnt	0,00167	575 Volt nach 23 st. Formierung	0,00849	104,3
3 {	Schnelles Rück- füllen der gesätt. Lösung $\text{NH}_4\text{HB}_2\text{O}_4$	0,0210	440 Volt unmittelbar nach Rückfüllen	0,00871	101,8
4 {	$\text{NH}_4\text{HC}_2\text{O}_4$ gesättigt	0,0590	295 Volt nach 20 st. Formierung	0,0232	38,0
5 {	$\text{NH}_4\text{HC}_2\text{O}_4$ verdünnt	0,00224	360 Volt nach 20 st. Formierung	0,0186	47,8
6 {	Schnelles Rück- füllen der gesätt. Lösung	0,0590	295 Volt unmittelbar nach Rückfüllen	0,0200	44,3
7 {	0,1 äq. norm. Na_2SiO_5	0,01012	445 Volt nach 20 st. Formierung	0,0121	72,0
8 {	Na_2SiO_5 stark verdünnt	0,00087	530 Volt nach 20 st. Formierung	0,00941	94,0
9 {	Schnelles Rück- füllen der 0,1 äq. n. Lösung	0,01012	460 Volt	0,01007	87,8

so viel abnimmt, wie sie auch infolge der dabei unvermeidlichen Stromunterbrechung abgenommen haben würde. Diese Beständigkeit der Gasschicht bei Stromunterbrechungen ist am größten in $\text{NH}_4\text{HB}_2\text{O}_4$, geringer in NH_4HCO_3 , am geringsten in Na_2SiO_3 . Die Maximalspannung ist infolge der künstlichen



1 Konzentrierte Lösung. 2 Verdünnte Lösung. 3 Schnelles Rückfüllen der konzentrierten Lösung.

• In $\text{NH}_4\text{HB}_2\text{O}_4$. ○ In Na_2SiO_3 . ✕ In NH_4HCO_3 .

Fig. 8. Zusammenhang zwischen Dicke der Gasschicht und Maximalspannung.

Verstärkung der wirksamen Schicht gestiegen, aber nicht auf den der erreichten Schichtdicke entsprechenden Wert, sondern auf einen erheblich geringeren, so daß die nach dem Einfüllen der höheren Konzentration erhaltenen Punkte aus der normalen Kurve herausfallen. Bei NH_4HCO_3 , bei dem die künstliche Verstärkung der Schicht nur gering war, trat keine merkliche Spannungserhöhung ein.

Eine Analogie dieser Erscheinung, daß z. B. in $\text{NH}_4\text{HB}_2\text{O}_4$ bei einer Verstärkung der (relativen) Schichtdicke δ/ϵ von 59,3 auf 101,6 $\mu\mu$ die Maximalspannung von 403 Volt nicht auf 575, sondern nur auf 440 Volt steigt, bietet die gewöhnliche

Funkenentladung zwischen Metallelektroden. Die zu ihr erforderliche Spannung folgt annähernd der Formel

$$E = a + b l,$$

wo a die auf den Elektrodenabstand Null (genauer auf den mittleren freien Weglänge des positiven Ions gleichen Elektrodenabstand) extrapolierte sogenannte „Mindestspannung“, b das Spannungsgefälle der Einheit der Länge l ist. Ganz analog können wir hier sagen: in der benutzten gesättigten $\text{NH}_4\text{HB}_2\text{O}_4$ -Lösung ist 403 Volt die Mindestspannung (und eben deswegen setzt gerade erst bei dieser Spannung die Funkenentladung ein) und

$$b l = 440 - 403 = 37 \text{ Volt},$$

$$l = 101,6 - 59,3 = 42,3 \mu\mu \quad (\text{relativ, } \frac{\delta}{e} !),$$

also $b = 0,87 \frac{\text{Volt}}{\mu\mu}.$

Für Na_2SiO_3 berechnet sich

$$b = 0,95 \frac{\text{Volt}}{\mu\mu} \cdot \left(\frac{\delta}{e} ! \right).$$

Die mitgeteilten Versuche führen uns wieder zu dem Schluß: Die Gasschicht kann nicht mehr wachsen, weil bei einer bestimmten, durch die Beschaffenheit des Elektrolyten gegebenen Spannung aus einer (oben schon angedeuteten) Ursache Funkenentladung möglich wird und eintritt.

Nun ist die gewöhnliche Funkenentladung dadurch bedingt, daß an einer der beiden Elektroden, und zwar unter normalen Verhältnissen an der Kathode, auf die mittlere freie Weglänge des positiven Ions seine Ionisierungsspannung gegen die Elektrode entfällt.

Wenn wir annehmen wollen, daß hier ähnliche Verhältnisse vorliegen, und uns der elektrischen Hypothese bedienen, so schließen wir, daß die Elektronen in der Gasschicht ionisierend wirken und daß Funkenentladung eintritt, wenn die Spannung so hoch gestiegen ist, daß die von den Elektronen geschaffenen positiven Ionen ihrerseits an der Kathode (Elektrolyt) Ionisation hervorrufen.

Ein sichtbares und beweiskräftiges Zeichen der von den Elektronen wirkten Ionisation ist das gleichmäßige bleiche Leuchten der Anode bei der Formierung.

Dieses Leuchten würde uns schon ganz allein zu der Hypothese führen, daß die wirksame Schicht eine Gasschicht ist und daß in dieser Gasschicht Ionisation stattfindet und das Leuchten verursacht.

Das Spektrum dieses Leuchtens ist schwer zu erhalten, weil es sehr lichtschwach ist und nur während der kurzen Zeit der Formierung auftritt. Viel leichter kann man das Spektrum der Funken sehen. Soweit man mit einem Taschenspektroskop beobachten kann, ist es völlig kontinuierlich, so lange die Spannung unter ca. 600 Volt liegt. Oberhalb dieser Spannung lagern sich die rote und grüne Wasserstofflinie hell über das kontinuierliche Spektrum. Der Umstand, daß das Spektrum kontinuierlich ist, spricht dafür, daß sich die Gaschicht unter hohem Druck (Molekularkräfte) befindet, was schon aus anderen Gründen vermutet wurde.

Nach Erreichung der Funkenspannung findet der Übergang von gleichmäßiger Strömung zu Funkenentladung nicht plötzlich statt sondern, wie Fig. 2 und die Oszillogramme Figg. 4—7 zeigen, nimmt die Funkenentladung allmählich auf Kosten der gleichmäßigen Strömung immer mehr zu. Daß das Steigen der Maximalspannung noch nach mehrtägiger Dauerumschaltung nicht aufgehört hat, zeigt Tab. III.

Tabelle III.

Maximalspannung von Aluminium (5,0 qcm) in $K_2B_2O_4$ -Lösung der Leitfähigkeit $517 \cdot 10^{-5} \text{ Ohm}^{-1} \text{ cm}^{-1}$ (18° C.) in Abhängigkeit von der Formierungsdauer (vgl. die entsprechende Kurve Fig. 2). Stromdichte während der ersten 30 Min. 0,01 Amp./qcm, dann 0,002 Amp./qcm.

Einschaltungsduer	Maximalspannung
30 Minuten	465 Volt
4 Stunden	490 "
48 "	540 "
67 "	545 "
86 "	550 "
106 "	555 "

Die Spannung, bei der die Funkenentladung eintritt, die Funkenspannung, hängt stark von der Beschaffenheit der Kathode der Gasschicht, also vom Elektrolyten ab. In welcher Weise sie bei demselben Elektrolyten mit der Konzentration variiert, haben wir bereits gesehen. Wie sie sich mit der Art des Elektrolyten ändert, zeigt Tab. IV, in der allerdings nicht die Funkenspannung selbst, sondern die nach 24 stündiger Formierung in 0,1 äq. norm. Lösung der verschiedenen Elektrolyte erreichten Maximalspannungen eingetragen sind.

Tabelle IV.

Maximalspannung von Aluminium und Tantal in den angegebenen Lösungen nach 24 stündiger Formierung.

Elektrolyt 0,1 äq. norm. Lösung von	Leitfähigkeit bei 20° C. Ohm ⁻¹ cm ⁻¹	Maximalspannung in Volt	
		Aluminium	Tantal
NaCl	1250 · 10 ⁻⁵	—	390
Oxalsäure	1190 "	—	445
KCN	1212 "	275	520
KMnO ₄	1096 "	112	105
(NH ₄) ₂ CrO ₄	1058 "	122	147
Na ₂ SiO ₃	1087 "	445	540
Na ₂ SO ₄	850 "	40	490
Ammoniumcitrat . . .	612 "	470	555
Na ₂ B ₄ O ₇	596 "	480	540
(NH ₄) ₂ HPO ₄ . . .	559 "	460	575
NH ₄ HCO ₃	488 "	425	525
Zitronensäure	169 "	536	605

Die Tabelle lässt besonders bei Tantal ein Ansteigen der Maximalspannung von dem am stärksten dissoziierten NaCl bis zu der am schwächsten dissoziierten Zitronensäure erkennen. Bei Aluminium sind zu wenige Elektrolyte brauchbar, um den Anstieg deutlich hervortreten zu lassen. Denn sobald

die Anode im Elektrolyten löslich ist, fällt die Ventilwirkung fort. Al in Na_2SO_4 steht an der Grenze. Die Vorgänge scheinen hier wesentlich andere zu sein, als bei den anderen Kombinationen, so daß man die angegebenen 40 Volt nicht als eine eigentliche Maximalspannung im Sinne unserer obigen Erwägungen ansehen darf.

Es paßt gut zu unserer Erklärung der Maximalspannung mittels der elektrischen Hypothese, daß die Maximalspannung sowohl bei Tantal als auch bei Aluminium in den Elektrolyten, deren Anionen Metall, also lose gebundene Elektronen enthalten, ganz abnorm niedrig liegt und ganz aus dem sonstigen Gange der Maximalspannung herausfällt. Hierher gehören KMnO_4 und $(\text{NH}_4)_2\text{CrO}_4$, ferner das nicht in die Tabelle aufgenommene $\text{K}_4\text{Fe}(\text{CN})_6$.

Die Abhängigkeit der Funkenspannung von Stromdichte und Temperatur zeigt Tab. V. Bei Verzehnfachung der Stromdichte steigt die angegebene Spannung von 385 auf 400 Volt. Dieser Anstieg ist aber wohl lediglich der Zunahme des Spannungsverlustes im Elektrolyten und in der Vorschicht mit zunehmender Stromdichte zuzuschreiben, denn die angegebenen Spannungen sind ja nicht die (kaum meßbaren) Spannungen an der Gasschicht selbst, sondern an der Zelle.

Tabelle V.

Funkenspannung von Al in $\text{K}_3\text{B}_2\text{O}_4$ -Lösung der Leitfähigkeit $517 \cdot 10^{-8} \text{ Ohm}^{-1} \text{ cm}^{-1}$ (18° C.) bei verschiedenen Stromdichten und Temperaturen.

Dauer der Einschaltung bis zum Erreichen der Funkenspannung	Stromdichte Amp. qem	Temperatur des Bades $^\circ \text{C.}$	Funkenspannung Volt
20 Min. 50 sec	0,002	-5	385
6 „ 55 „	0,01	-5	390
3 „ 00 „	0,02	-5	400
9 „ 30 „	0,01	50	400
22 „ 00 „	0,02	71	400

Wir können also annehmen, daß die eigentliche Funkenspannung E von der Formierungsstromdichte unabhängig ist.

Dasselbe gilt von dem Einfluß der Temperatur. Die Temperatur in der Zelle war stets höher als die des Bades. Die Geschwindigkeit der Formierung nimmt mit steigender Temperatur sehr stark ab. Bei 71°C . und $0,01\text{ Amp./qcm}$ wurde sie verschwindend gering, so daß die Stromdichte bei dieser Temperatur auf $0,02\text{ Amp./qcm}$ erhöht werden mußte. Dadurch wurde die in der Gasschicht entwickelte Wärmemenge so groß (bei 400 Volt wurden an der Aluminiumelektrode von 5 qcm Oberfläche 40 Watt in Wärme verwandelt), daß der Elektrolyt an der Anode zu sieden begann. Trotzdem setzte auch hier die Funkenentladung bei 400 Volt exakt ein.

Diese Unabhängigkeit der Funkenspannung von Formierungsstromdichte und Temperatur wird von unserer Hypothese gefordert.

Zusammenfassung.

1. Die Vorgänge bei der Formierung von Aluminiumanoden lassen sich erklären, wenn man die Annahme macht, daß elektrolytische Anionen negative Elektronen abspalten, wenn sie auf einen hohen Widerstand und hohes Spannungsgefälle stoßen, und daß die dabei entstehenden neutralen Sauerstoffatome durch die Abspaltung einen heftigen Rückstoß erhalten.

2. Das Wachsen der Gasschicht bei der Formierung wird durch eine konstante gleichmäßig über die Oberfläche der Anode verteilte Strömung hervorgerufen. Die Ursache der Maximalspannung ist darin zu suchen, daß die Gasschicht nicht mehr wachsen kann, weil bei einer bestimmten Spannung („Funkenspannung“) Funkenentladung in der Gasschicht möglich wird und eintritt. Der Übergang von der gleichmäßigen Strömung zur Funkenströmung und das Aufhören des Wachsendes der Gasschicht findet vom Beginn der Funkenentladung allmählich statt.

3. Die Funkenspannung steigt bei einem und demselben Elektrolyten mit der Verdünnung, bei verschiedenen Elektrolyten derselben Konzentration nimmt sie anscheinend im allgemeinen mit zunehmendem Dissoziationsgrad ab (Ausnahmen: Elektrolyte, welche die Anode lösen und Elektrolyte, deren Anionen Metall enthalten).

4. Die Funkenspannung ist von der Formierungsstromdichte und der Temperatur der Zelle unabhängig.

(Eingegangen 15. Januar 1909.)

**4. Polarisation der X-Strahlen,
nachgewiesen mittels Sekundärstrahlung;
von Eugen Bassler.**

(Auszug aus der Münchener Dissertation 1908.)

I. Einleitung.

1. *Blondlot¹⁾* war der erste, der auf Grund seiner Versuche die Behauptung aufstellte, daß die X-Strahlen, so wie wir sie gegenwärtig erzeugen, polarisiert emittiert würden. Dieser Gedanke ist übrigens schon früher von Gifford²⁾ ausgesprochen, doch nicht auf seine Richtigkeit experimentell geprüft worden. Blondlot machte seine Versuche auf Grund folgender Überlegung:

Da jeder X-Strahl aus einem Kathodenstrahl entsteht, so bestimmen (im allgemeinen) diese beiden Strahlen eine Ebene („Aktionsebene“) und durch jeden X-Strahl geht somit eine Ebene, in der der Strahl ausgezeichnete Eigenschaften haben kann, d. h. möglicherweise polarisiert ist.

Zum Nachweis dieser Polarisation diente Blondlot eine kleine Funkenstrecke. Diese wird in ein X-Strahlenbündel gebracht, dessen Achse senkrecht zur Achse der Kathodenstrahlen verläuft. Die Funkenstrecke wird dann um die X-Strahlenachse gedreht, in einer Ebene, die zu dieser Achse senkrecht liegt. Dabei kommt die Funkenstrecke abwechselnd parallel und senkrecht zur Kathodenstrahlenachse zu liegen und zeigt Intensitätsvariationen, nämlich ein Maximum in der parallelen, ein Minimum in der senkrechten Lage. Wird die X-Strahleröhre um die Achse der Kathodenstrahlen gedreht, so bleibt der Verlauf der Erscheinung derselbe. Ist die Achse des benutzten X-Strahlenbündels nicht senkrecht zu den Kathodenstrahlen, so nimmt die Polarisation ab.

1) R. Blondlot, Journ. de Phys. (4) 2. p. 169—172. 1908.

2) J. W. Gifford, Nature 54. p. 172. 1896.

Versuche, die früher im hiesigen Institut angestellt wurden, zeigten die Unrichtigkeit der Blondlotschen Schlußfolgerungen und gaben auch eine Erklärung dafür.

Blondots Versuche boten Lieben¹⁾ die Veranlassung, die Polarisation der X-Strahlen mittels Sekundärstrahlen, die er an Hg entstehen und auf eine photographische Platte wirken ließ, zu untersuchen. Er erhielt Polarisation, mußte aber, als er später seine Versuche wiederholte, erkennen, daß diese Polarisation nur vorgetäuscht war durch jene schwachen X-Strahlen, die an der Glaswand der Röhre entstehen.

Die Liebenschen Versuche hätten zum Barklaschen Resultat führen müssen.

2. Barklas Versuche. Barkla²⁾ gibt an, daß er zu seinen Versuchen über die Polarisation der X-Strahlen durch folgende Betrachtungen geführt wurde:

„Nach der elektromagnetischen Impulstheorie der X-Strahlen erfährt jedes Ion in einem Medium, welches von diesen Impulsen durchsetzt wird, infolge der intensiven elektrischen Felder in denselben eine Beschleunigung, und wird folglich die Quelle einer sekundären Strahlung, die am intensivsten in der Richtung senkrecht zur Beschleunigung des Ions ist, und am schwächsten in der Richtung der Beschleunigung.“

Da nun die X-Strahlung in der X-Strahlenröhre in der Weise hervorgerufen wird, daß die Elektronen der Kathodenstrahlen in angennähert parallelen Bahnen von der Kathode zur Antikathode geschleudert werden, ist es wahrscheinlich, daß an der Antikathode eine größere Beschleunigung in der Fortpflanzungsrichtung der Kathodenstrahlen vorhanden ist als in einer dazu senkrechten Richtung. Demzufolge müßte ein primäres X-Strahlenbündel, das in einer Richtung senkrecht zu den Kathodenstrahlen verläuft, größere elektrische Intensität parallel zu den Kathodenstrahlen zeigen als senkrecht zu den Kathodenstrahlen.

Die Sekundärstrahlung, die ein von einem solchen primären Strahlenbündel durchsetzter Körper emittiert, müßte — in einer Ebene senkrecht zur Achse des primären Strahlen-

1) R. v. Lieben, Physik. Zeitschr. 4. p. 471. 1903 und 5. p. 72 bis 78. 1904.

2) C. G. Barkla, Phil. Trans. (A) 204. p. 467—479. 1905.

bündels untersucht — parallel den Kathodenstrahlen minimale, senkrecht zu den Kathodenstrahlen maximale Intensität zeigen.“

Barkla führte die Versuche in der Weise aus, daß er die Sekundärstrahlen eines hierzu geeigneten Körpers, der von senkrecht zu den Kathodenstrahlen ausgehenden Primärstrahlen getroffen wurde, in einer Ebene, senkrecht zur Achse des primären Bündels, auf zwei Elektroskope einfachster Art wirken ließ. Die Richtung von der Sekundärstrahlenquelle zu den Elektroskopen war senkrecht bzw. parallel zu den Kathodenstrahlen. Der Körper, der, von X-Strahlen getroffen, die Sekundärstrahlen emittierte, bestand bei Barklas Versuchen aus Papier, Pappe, Aluminium, Schwefel, Kohle oder verschiedenen Metallen und ihren Salzen. Er möge „Radiator“ genannt werden. Die Form der Barklaschen Radiatoren war die kleiner quadratischer Scheiben. Um eine Kontrolle für die Richtigkeit der Beobachtung zu erhalten, wurde die Röhre um die Achse des senkrecht zu den Kathodenstrahlen emittierten primären X-Strahlenbündels gedreht. Ein passend gewählter Punkt der Antikathode, der am Fadenkreuz eines Fernrohres betrachtet wurde, durfte sich beim Drehen der Röhre nicht verschieben, um nicht eine unsymmetrische Bestrahlung des Radiators zu veranlassen.

Als Resultat seiner Versuche fand Barkla, daß die in verschiedenen Richtungen verschiedene Sekundärstrahlung eine teilweise Polarisation der primären X-Strahlen anzeigen. Diese Polarisation läßt sich um so leichter nachweisen, je geringer die Dichte des Radiators ist. Die Schwermetalle versagen hierbei vollständig. Als Maximum erhielt Barkla für Aluminium 20 Proz. Polarisation.¹⁾ Später untersuchte dann Barkla²⁾, ob auch die Sekundärstrahlen polarisiert sind; es gelang ihm, aus der Verschiedenheit der durch die Sekundärstrahlen erzeugten Tertiärstrahlen eine fast vollständige Polarisation der Sekundärstrahlen nachzuweisen.

1) Nach einer jüngst erschienenen zusammenfassenden Darstellung (Jahrb. d. Radioaktiv. u. Elektron. 5. p. 271. 1908) ergab sich auch ein Einfluß der X-Strahlenhärté auf den Betrag der Polarisation in dem Sinne, daß weiche Strahlen eine größere Polarisation in ihrer Sekundärstrahlung zum Ausdruck bringen.

2) C. G. Barkla, Proc. Roy. Soc. (A) 77. p. 247—255. 1906.

Gegen die Barklaschen Versuche läßt sich einiges einwenden:

Zunächst wird die Luftsicht, die den Radiator umgibt, nicht nach beiden Richtungen in gleicher Ausdehnung bestrahlt. Infolgedessen ist die an sich unvermeidliche Sekundärstrahlung der Luft nicht gleich intensiv nach beiden Richtungen.

Dann bringt die Verwendung von Blechen, Scheiben und Platten als Radiatoren selbst bei sorgfältigster Aufstellung Asymmetrie der Sekundärstrahlung nur zu leicht mit sich. Das Drehen der Röhre eliminiert zwar die hauptsächlichsten Fehler; doch gibt das Elektrometer nicht die richtigen Werte an, namentlich dann, wenn die Strahlung des Radiators von der der Luft bzw. der Intensität nicht sehr verschieden ist.

Ferner sind die an der Glaswand der Röhre entstehenden X-Strahlen nicht in genügender Weise ausgeschlossen.

Auch ist die Beobachtung eines geeigneten Punktes der Antikathode mittels Fernrohr nicht zuverlässig, wenn es gilt, die Emissionsstelle der X-Strahlen im Raume festzuhalten. —

Barkla definiert den Betrag der Polarisation folgendermaßen:

Der Radiator wird eine gewisse Zeit t bestrahlt; dabei wird die Wirkung A_1 am Elektroskop I und die Wirkung A_2 am Elektroskop II festgestellt. Dann wird die Röhre um 90° um die Achse des senkrecht zu den Kathodenstrahlen emittierten X-Strahlenbündels gedreht und der Radiator wieder bestrahlt, nun aber eine Zeit t' , d. h. so lange, bis am gleichen Elektroskop I der gleiche Wert $B_1 = A_1$ wie vorher erhalten wird, während Elektroskop II den Wert B_2 angeben mag. Barkla bezeichnet nun das Verhältnis $(B_2 - A_2)/A_1$ als Polarisation. Nach der von mir gewählten Definition (vgl. § 9) würden sich die Barklaschen Zahlen über die Größe der Polarisation in Prozenten auf ein Viertel ihres Wertes reduzieren.

3. In der vorliegenden Arbeit habe ich in den Jahren 1906 bis 1907 auf Veranlassung von Hrn. Geheimrat Röntgen experimentell untersucht, ob die von Barkla beobachteten Erscheinungen in Wahrheit die Folge einer Polarisation der X-Strahlen sind und außerdem einige quantitative Bestimmungen gemacht.

Es wurde weiter wiederholt — aber stets mit negativem

Resultat — versucht, die Polarisation der X-Strahlen mittels Sekundärstrahlen auch photographisch nachzuweisen.

Inzwischen erschien die Veröffentlichung von Haga¹⁾, der mittels Sekundärstrahlen den Nachweis einer Polarisation der Primärstrahlen photographisch nicht erhielt, wohl aber eine Polarisation der Sekundärstrahlen mittels Tertiärstrahlen nachweisen konnte.

Hierauf, sowie auf die von van der Waals jr.²⁾ veröffentlichte Notiz wird unten zurückzukommen sein.

II. Elektrische Versuche.

1. Versuchsanordnung.

4. Gemäß den oben dargelegten Betrachtungen Barkla, die sich auf die Impulstheorie der X-Strahlen beziehen, wurde folgende Versuchsanordnung getroffen:

Ein X-Strahlenbündel, dessen Achse senkrecht zur Achse des erzeugenden Kathodenstrahlenbündels verläuft, wird auf Polarisation untersucht, indem man es einen Radiator bestrahlt, der hierdurch seinerseits sekundäre X-Strahlen nach allen Richtungen aussendet. Die Intensität dieser Sekundärstrahlen wird gemessen an dem Grad der Ionisierung der Luft, und in einer durch den Radiator senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Primärstrahlen gelegenen Ebene untersucht, und zwar besonders in solchen Richtungen, die parallel und normal zu den Kathodenstrahlen verlaufen. Wir nennen dann den primären Strahl polarisiert in dem Maße, als die sekundäre Strahlung Intensitätsverschiedenheit in jenen beiden Richtungen aufweist.

Um von vornherein Asymmetrie der Bestrahlung möglichst zu vermeiden, wählten wir für die Form des Radiators die Kugel, während Barkla Platten verwendet, und benutzten einen X-Strahlenkegel von kreisförmigem Querschnitt. Da Barkla angibt, daß sich die Polarisation nur mittels Substanzen von geringer Dichte nachweisen lasse (z. B. Al), so suchte ich nach einem Körper, der bei einer Dichte, kleiner oder höchstens gleich der des Al, möglichst intensive Sekundär-

1) H. Haga, Ann. d. Phys. 23. p. 439—444. 1907.

2) van der Waals jr., Ann. d. Phys. 22. p. 603—605. 1907.

strahlen aussendet und fand Paraffin als wirksamste Radiatorsubstanz.

Die Messungen wurden nach folgender Differentialmethode ausgeführt, die gestattete, die Differenz der Intensität der Sekundärstrahlen in den zwei zueinander senkrechten Richtungen, parallel und normal zu den Kathodenstrahlen, unmittelbar und gleichzeitig an demselben Elektrometer abzulesen.

Die vom Radiator in einer Ebene senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung ausgehende Sekundärstrahlung trifft in zwei zueinander senkrechten Richtungen auf je einen Kondensator. Beide Kondensatoren bestanden aus je einer Metallplatte und einem Metallgitter. Beide Platten waren senkrecht zu der sie treffenden Sekundärstrahlung gestellt und gleichzeitig mit dem Elektrometer verbunden. Vor jeder Platte und parallel zu ihr befand sich je ein Gitter, von denen das eine durch eine Akkumulatorenbatterie auf +100 Volt, das andere auf -100 Volt geladen war. Die Sekundärstrahlen, die vom Radiator ausgehen, passieren die Gitter, ionisieren die Luft zwischen Gitter und zugehöriger Platte, und ein Teil der Ladung des Gitters wird auf die Platte und damit auf das Elektroskop übertragen. Dieses empfängt also gleichzeitig positive und negative Ladung. Sind nun bei beiden Kondensatoren Kapazität und entsprechende Entfernung von Radiator, Gitter und Platte gleich, so sind — unter der Voraussetzung, daß die Sekundärstrahlung des Radiators nach beiden Richtungen gleich intensiv ist — die Ladungen, die das Elektrometer erhält, entgegengesetzt gleich und neutralisieren sich völlig. Ein Überschuß der einen Elektrizitätsart weist auf eine größere oder geringere Intensität der Sekundärstrahlung des Radiators in der einen Richtung hin, und damit, wenn nur der Radiator selbst und die ihn umgebende Luft gleichmäßig symmetrisch bestrahlt wird, auf eine Polarisation der primären X-Strahlen.

Um die Verteilung der Intensität der Sekundärstrahlung in der oben genannten Ebene senkrecht zum primären X-Strahlenbündel in allen vier Quadranten kennen zu lernen, ist es am zweckmäßigsten, die X-Strahlenröhre um das untersuchte primäre X-Strahlenbündel zu drehen, während die Kondensatoren fest stehen bleiben. Maxima und Minima der Sekundär-

strahlung müßten dann mit der Richtung der Kathodenstrahlen wandern, falls in Wahrheit eine Polarisation im X-Strahl besteht. Die Röhre wurde deshalb in eine geeignete und exakte Drehvorrichtung eingespannt. „Röhrenstellung von 0° “ heiße diejenige Lage der Röhre, bei der die Kathodenstrahlen vertikal von unten nach oben gehen.

Als Kriterium dafür, daß die Emissionsstelle der X-Strahlen (auf der Antikathode) bei der Drehung der Röhre im Raum unverändert lag, wurden die Schattenprojektionen zweier geeignet aufgestellten Fadenkreuze (aus Pb-Draht) benutzt (vgl. § 5).

Um eine rasche und bequeme Bezeichnung aller vorgenommenen Manipulationen zu ermöglichen, führen wir folgendes, im Raum festes rechtwinkliges Koordinatensystem ein, dessen Ursprung auf der Antikathode in der Emissionsstelle der X-Strahlen liegt. Die X-Achse laufe horizontal und sei die Achse des den Radiator bestrahrenden primären X-Strahlenbündels. Die X-Achse sei vertikal nach oben gerichtet.

5. Bei der experimentellen Ausführung der im vorhergehenden Paragraphen im Prinzip dargelegten Versuchsanordnung mußten hauptsächlich Maßnahmen getroffen werden:

a) gegen elektrostatische Störungen und gegen die Einwirkung direkter Primärstrahlen auf Kondensatoren und Elektrometer; diese wurden deshalb in einem geerdeten Bleikasten aufgestellt.

b) gegen Störungen von seiten des Kontaktpotentiales, das sich in dem von ionisierter Luft erfüllten Radiatorraum dann an den Elektrometerangaben bemerkbar machte, wenn gleichzeitig verschiedene Metalle (die Kondensatorplatten und -gitter, sowie der Radiator und das Pb des Gehäuses) in jenem Raum zugegen waren. Dieser Einfluß wurde beseitigt, indem man sämtliche Metalle im obigen Raum aus Pb herstellte oder mit Pb verkleidete bzw. verbleite nach dem beim Verzinnen (Löten) üblichen Verfahren. —

Es folgt nun die Beschreibung der einzelnen Teile der Versuchsanordnung; das Wesentlichste derselben ist in Figg. 1—3 in Horizontal- und Vertikalprojektion dargestellt.

Bemerkung: Eine allgemeine Übersicht über die Versuchsanordnung bieten die Figg. 1 und 2 (Versuchsanordnung der Vorversuche), Dimensionen und Einzelheiten sind nur aus Fig. 3 (endgültige Versuchsanordnung der Messungen) zu entnehmen.

Bleikasten: Radiator, Kondensatoren und Elektrometer befanden sich in einem großen Bleikasten, dessen Dimensionen aus Fig. 1 und Fig. 2 zu ersehen sind. Die Dicke des benutzten Bleibleches betrug 3 mm. Durch die vertikale Zwischen-

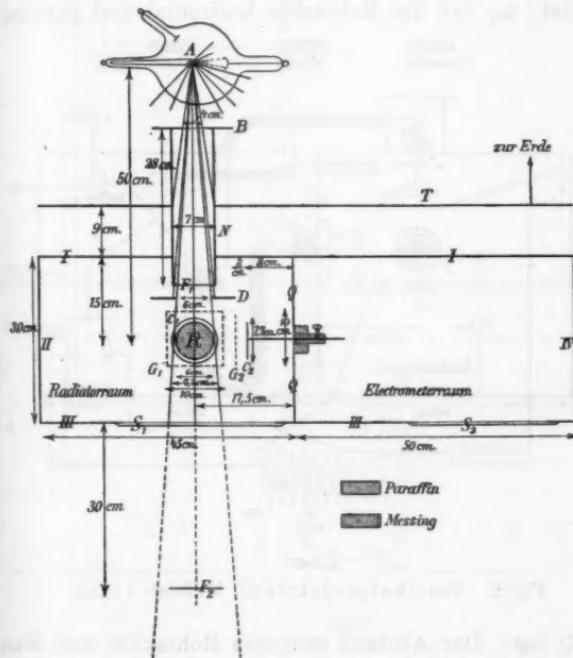


Fig. 1. Horizontalprojektion. Maßstab 1 : 12,5.

wand Q war der Kasten in zwei Teile, Radiatorraum und Elektometerraum getrennt. Die Rückwand (III) war größtenteils durch die auf Messingstreifen gleitenden verschiebbaren Platten S_1 und S_2 ersetzt. Parallel zur Wand I befand sich ein großer Bleischirm T , der mit der vertikalen Wand I durch eine in das Pb eingesetzte kreiszylindrische Röhre N aus Pb-Blech verbunden war. Die Achse des Rohres N (Fig. 3),

durch welche die X -Achse des ganzen Systems gehen mußte, wurde möglichst genau durch Visieren, Anlegen einer Irisblende usw. ermittelt; markiert wurde die Achse an dem einen Rohrende durch ein genau orientiertes und zentriertes Kreuz aus horizontalem und vertikalem Pb-Draht, F_1 , am anderen Rohrende durch die Kanten zweier aufgeklebter Papierstreifen, die erst wieder entfernt wurden, als alles fertiggebaut war. Das Rohr N wurde an den Pb-Schirm T mittels Holzstützen angekittet, so, daß die Rohrachse horizontal und parallel der

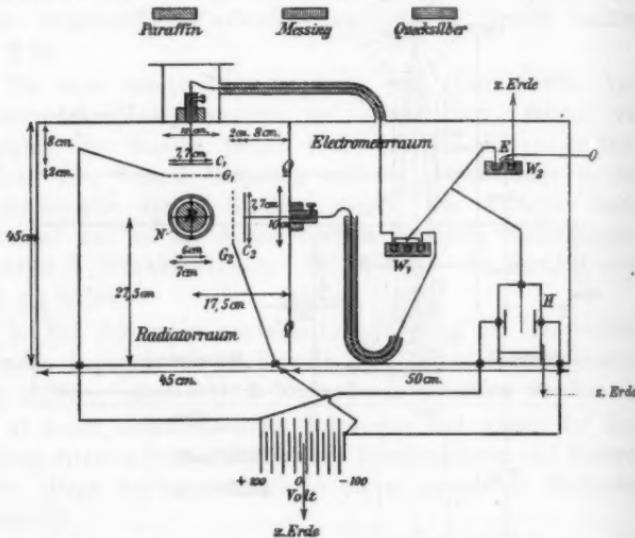


Fig. 2. Vertikalprojektion. Maßstab 1:12,5.

Wand Q lag. Der Abstand zwischen Rohrachse und Wand Q betrug 16 cm. An das herausragende Ende der Röhre N wurde senkrecht zu ihrer Achse eine 5 mm starke Pb-Platte B angelötet und diese konzentrisch zur Rohrachse mit einem runden Loch versehen. Auf diese wurde noch ein Diaphragma D_1 aus Pb gekittet, dessen runde Öffnung so bemessen war, daß keine Primärstrahlen das andere Rohrende (in der Nähe von F_1) treffen und hier störende Sekundärstrahlen erregen konnten. Die Richtigkeit der Berechnung wurde durch Beobachtung mittels des Fluoreszenzschildes kontrolliert. Diese Öffnung

wurde mit 0,03 mm starker Al-Folie, die mittels Reißnägeln mit dem Pb gut leitend verbunden war, verschlossen.

Da an der Stelle, wo der Schieber S_1 von Primärstrahlen getroffen wurde, störende Sekundärstrahlen auftreten mußten,

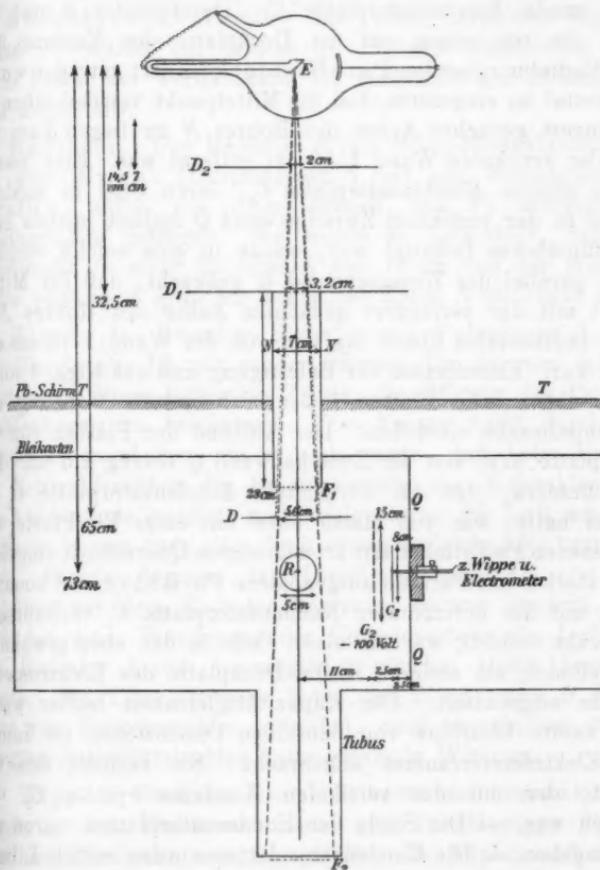


Fig. 3. Horizontalprojektion. Maßstab 1:10.

wurde in den Schieber ein entsprechend weiter Tubus eingesetzt. Der Tubus war aus Zn-Blech (aus Festigkeitsgründen), innen mit Pb-Blech umgeben und am anderen Ende durch ein Pb-Blech verschlossen.

Alle Teile des Bleikastens waren untereinander durch angelötete Pb-Drähte verbunden und zur Erde abgeleitet (Wasserleitung).

Kondensatorplatten. In den Radiatorraum wurde nun eine runde Kondensatorplatte C_1 (Durchmesser 8 cm) aus Blei, die von einem auf der Deckplatte des Kastens über dem Radiator ruhenden Paraffinblock isoliert getragen wurde, horizontal so eingesetzt, daß ihr Mittelpunkt vertikal über die verlängert gedachte Achse des Rohres N zu liegen kam und von der vertikalen Wand I 16 cm entfernt war. Eine zweite, genau gleiche Kondensatorplatte C_2 , deren Stiel in analoger Weise in der vertikalen Zwischenwand Q isoliert mittels eines Paraffinstückes befestigt war, wurde in eine solche vertikale Lage parallel der Zwischenwand Q gebracht, daß ihr Mittelpunkt mit der verlängert gedachten Achse des Rohres N in einer horizontalen Ebene lag und von der Wand I 16 cm entfernt war. Einzelheiten der Befestigung sind aus Figg. 1 und 2 zu ersehen. Die Platten ließen sich mittels Führung und Klemmschraube einstellen. Der Abstand der Platten von der Deckplatte bzw. von der Zwischenwand Q betrug 2,5 cm. Der Paraffinblock, der die horizontale Kondensatorplatte C_1 zu tragen hatte, war von einem oben mit einer Pb-Platte verschlossenen Pb-Zylinder mit kreisförmigem Querschnitt umgeben. Eine starke, mit Paraffin ausgegossene Pb-Röhre, die kon axial einen mit der horizontalen Kondensatorplatte C_1 verbundenen Cu-Draht enthielt, war am einen Ende in den eben erwähnten Bleizylinder, am anderen in die Deckplatte des Elektrometerraumes eingelassen. Der Kapazitätsgleichheit halber wurde eine zweite Bleiröhre von denselben Dimensionen im Innern des Elektrometerraumes angebracht. Sie enthielt den Cu-Draht, der mit der vertikalen Kondensatorplatte C_2 verbunden war. — Die Stiele der Kondensatorplatten waren mit Pb umgeben. — Die Kondensatorplatten wurden mittels Libelle, Senkel und rechtem Winkel orientiert. Die Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte war parallel einer zur X -Achse senkrechten Ebene.

Gitter. 2,5 cm unterhalb der horizontalen Kondensatorplatte C_1 wurde nun ein quadratisches Gitter G_1 von der Seitenlänge 15 cm und der Maschenweite 1,5 mm, das aus

0,85 mm dickem Pb-Draht auf einen Hartgummirahmen geflochten war, horizontal aufgestellt. Ein gleiches Gitter G_3 wurde parallel der vertikalen Platte C_2 vor diese in einer Entfernung von 2,5 cm aufgestellt.

Fadenkreuze. Parallel dem oben erwähnten Fadenkreuze F_1 wurde ein zweites F_2 in einer Entfernung von 25 cm hinter der Vertikalwand III außerhalb des Bleikastens axial aufgestellt.

Radiator. Der Radiator R (die Sekundärstrahlenquelle) war eine Kugel (Durchmesser 5 cm) aus hochsiedendem Paraffin, unten von einer dünnen, mit Pb überzogenen Messingstange getragen. Sie wurde so aufgestellt, daß ihr Mittelpunkt in einer Entfernung von 16 cm von der Wand I in die verlängert gedachte Achse der Röhre N zu liegen kam.

Blende D . Zwischen Radiator und Fadenkreuz F_1 kam eine Blende aus Pb mit runder Öffnung (Durchmesser 5,6 cm) zu stehen. Diese hatte den Zweck, die Öffnung des Primärstrahlenkegels zu bestimmen. Dies konnte nicht durch die Blende D_1 geschehen, da es sich zeigte, daß beim Drehen der X-Strahlenröhre die Emissionsstelle der X-Strahlen auf der Antikathode wandert und infolgedessen die Luft um den Radiator herum trotz aller Zentrierung ungleichmäßig bestrahlt wird. Wurde dagegen das Primärstrahlenbündel erst unmittelbar vor dem Radiator begrenzt, so war erreicht, daß auch bei einer Wanderung der Emissionsstelle die Luft um den Radiator herum in möglichst gleicher Dicke bestrahlt wurde. Ein 2 mm schmaler Saum des Diaphragma D wurde zwar von Primärstrahlen getroffen, doch veranlaßten die so erregten Sekundärstrahlen keine störende Wirkung.

Wippen. Um Kontrollversuche leicht ausführen zu können, wurde in dem Elektrometerraum eine Paraffinwippe W_1 mit drei amalgamierten mit Hg gefüllten Cu-Näpfen aufgestellt. Die Wippe war soweit wie möglich mit geerdetem Stanniol überzogen. Von den beiden äußeren Näpfen stand der eine mit der vertikalen Kondensatorplatte C_2 , der andere mit der horizontalen Kondensatorplatte C_1 in Verbindung. Vom mittleren Napf führte ein Draht zum Blättchen des Elektrometers. Eine zweite Wippe W_2 , die von außen zu betätigen war, setzte den

mittleren Napf der Wippe W_1 beim Umlegen des stets geerdeten Bügels E mit der Erdleitung in Verbindung.

Elektrometer. Das Meßinstrument war ein Hankelsches Elektrometer H . Das Gehäuse war geerdet, die beiden Seitenplatten durch eine Akkumulatorenbatterie auf Plus und Minus 100 Volt geladen. Die Glasplatten des Elektrometers wurden so weit wie möglich mit Stanniol bedeckt und dieses geerdet. Für das Ablesefernrohr wurde eine passende Öffnung in die Wand IV gemacht. Die Beleuchtung erfolgte durch eine außerhalb des Pb-Kastens vor einem Bleiglasfenster angebrachte Lampe mittels Spiegel. Außerdem stand noch im Elektrometerraum ein Gefäß mit konz. Schwefelsäure.

Im Elektrometerraum war eine Pb-Verkleidung unnötig, wenn nur gesorgt war, daß keine ionisierte Luft hineinkam: das Fenster in den Radiatorraum hinein war mit eingelassenem Paraffin dicht verschlossen; an den Fugen und Spalten des Kastens, namentlich am Schieber, waren Wattestreifen angeklebt.

Akkumulatorenbatterie. Neben dem Pb-Kasten befand sich ein großer, allseitig geschlossener Kasten aus Weißblech, der 100 Hochspannungsakkumulatoren enthielt. Die Mitte der Batterie war geerdet. Der positive Pol stand mit dem horizontalen Gitter G_1 , der negative mit dem vertikalen Gitter G_2 in Verbindung. Die Kabel, die die Spannung übertrugen, endeten in blanken Pb-Drähten. In beide Leitungen waren gleiche Lampenwiderstände eingelegt. Zwei andere Leitungen führten von den Batteriepolen zu den Seitenplatten des Hankelschen Elektrometers. In diese Leitungen waren gleiche Flüssigkeitswiderstände (dest. H_2O) eingelegt. Alle Widerstände befanden sich in geerdeten Blechkästen, die Zuleitungen, soweit sie außerhalb der Kästen geführt werden mußten, in geerdeten Bergmannsröhren. Somit war alles gegen Wirkungen des Induktors geschützt. Die Spannung der Batterie wurde öfters kontrolliert; sie betrug Plus und Minus 103 Volt in jeder Hälfte.

Drehvorrichtung. Auf die horizontale Achse einer Zentrifugalmaschine wurde ein Halter gesetzt, der die X-Strahlröhre am Kathoden- und Antikathodenansatzrohr festhielt. Die beiden Arme des Halters waren so bemessen, daß die Längs-

achse der Röhre senkrecht zur Drehachse der Maschine lag. Der Halter war aus Holz so fest hergestellt, daß er einer durch die Drehung bewirkten Schwerpunktsänderung nicht nachgab. Schlittenverschiebung und Stellschrauben ermöglichten es, die Röhre in der zur Drehachse senkrechten Ebene beliebig zu verschieben, so daß also die Emissionsstelle der Strahlen in die verlängert gedachte Achse der Zentrifugalmaschine gebracht werden konnte. Der Winkel, um den die Röhre gedreht wurde, war an einer Kreisteilung abzulesen.

Diaphragma D_2 . Unmittelbar vor die X-Strahlenröhre wurde noch ein drittes Pb-Diaphragma gesetzt (Durchmesser der Öffnung 2 cm), so daß unmöglich die an der seitlichen Wandung der X-Strahlenröhre entstehenden Primärstrahlen in den Radiatorraum gelangen konnten.

X-Strahlenröhren. Im Verlauf der Untersuchung kamen sechs Röhren zur Verwendung; alle gehörten demselben Typus an: Fokusröhren, mittelhart, für 35—40 cm Schlagweite, von Siemens bezogen, von Gundelach in Gehlberg geblassen.

Induktorium. Anfangs wurde ein Induktorium älteren Systems, für 40 Volt und 5 Amp., das mittels Voltohm-(Motor-)unterbrecher betrieben wurde, benutzt, dann ein neuerer Klingelfuss-Induktor (110 Volt, 4 Amp.), der meistens mit dem Turbinen-Unterbrecher betrieben wurde.

Die Lage der Zuführungsdrähte, die die Energie von den Sekundärklemmen des Induktors zur X-Strahlenröhre führten — es waren hochisolierende Kabel von Siemens —, ist nicht ohne Einfluß auf die Härte der Röhre, und damit auf die Intensität der Sekundärstrahlen. Deshalb wurden die Zuführungsdrähte nicht unmittelbar in den Ösen der Kathoden- und Antikathodenelektrode befestigt, sondern von diesen beiden Ösen aus führte je ein blander Cu-Draht parallel zur Achse der Drehvorrichtung von der Röhre fort und endigte in je einer durchbohrten, kleinen, länglichen Ebonitplatte, welche an dem auf der Achse der Drehvorrichtung aufgeschraubten Grundbrett des Halters befestigt war. Durch diese gewissermaßen verlängerten Elektroden war erreicht, daß die Zuführungsdrähte wenigstens in der Nähe der Röhre bei einer Drehung

derselben keine andere Lage (relativ zur Röhre) annehmen konnten. An die in den erwähnten Ebonitplatten endenden Cu-Drähte wurden dann die Induktorkabel angeschlossen.

In der folgenden Tabelle sind die Dimensionen der einzelnen Teile der Versuchsanordnung angegeben:

Durchmesser der Kugel der X-Strahlenröhre	15	em
Entfernung Antikathodenmitte-Diaphragma D_2	14,5	"
", nächster Punkt der Kugel-Diaphragma D_2	7	"
Durchmesser des Diaphragmas D_3	2	"
Entfernung Antikathodenmitte-Diaphragma D_1	32,5	"
Durchmesser des Diaphragmas D_1	3,2	"
Länge des Pb-Rohres samt Stärke des Diaphragmas D_1 .	28	"
Durchmesser des Pb-Rohres N	7	"
Entfernung Antikathodenmitte-Diaphragma D	65	"
Durchmesser des Diaphragmas D	5,6	"
Entfernung Antikathodenmitte-Radiatorenzentrum	73	"
Durchmesser des Radiators	5	"
Entfernung Radiatorzentrum-Gitter	11	"
Fläche des quadratischen Pb-Gitters	(15.15)qm	
Entfernung Gitter-Kondensatorplatte	2,5	em
Durchmesser der Kondensatorplatten aus Pb	8	"
Entfernung Kondensatorplatte-Pb-Wand	2,5	"

2. Einstellung der Apparate.

6. Das Einstellen der Emissionsstelle der X-Strahlen in die Achse der Drehvorrichtung wurde mittels X-Strahlen ausgeführt: In die verlängert gedachte Achse der Drehvorrichtung wurden senkrecht zu dieser Achse zwei parallele Fadenkreuze aus Pb-Draht, in etwa 30 cm Entfernung voneinander und ebensolcher von der Achse der Drehvorrichtung, gebracht und dann ihre Schattenbilder auf dem Bariumplatincyanürschirm betrachtet, die bei jeder Röhrenstellung zusammenfallen mußten, wenn die Emissionsstelle der X-Strahlen in jener Achse lag.

7. Die Einstellung der Drehachse, und damit zugleich der Emissionsstelle, in die X-Achse des Rohres N war erreicht, sowie die Horizontal- und Vertikalfäden der Fadenkreuze F_1 und F_2 in ihren Schattenbildern auf dem Fluoreszenzschirm, unmittelbar hinter F_2 , zusammenfielen. Außerdem wurde noch eine runde Messingscheibe, deren Zentrum durchbohrt war, optisch in die X-Achse zentriert, dort, wo das

Diaphragma *D* für den eigentlichen Versuch zu stehen kam. Dann wurde die Röhre betätigt, und der Bariumplatincyanürschirm hinter die Messingscheibe gehalten, wobei die Entfernung Messingscheibe-Fluoreszenzschirm variiert wurde. Das Schattenbild auf dem Schirm zeigte, von der Mitte nach der Peripherie zu gesehen, folgende Einzelheiten: in der Mitte den Schnittpunkt der Pb-Fäden des Kreuzes *F*₁, dann ein heller kleiner Kreis, herrührend von der Bohrung der Scheibe, dann einen dunklen Ring, nämlich die Projektion der Messingscheibe, diesen umgeben von einem ringsförmigen, hellen Saum. Nur wenn die Achse des Rohres *N* mit der Achse der Drehvorrichtung zusammenfiel, konnte dies Bild bei jeder Röhrenstellung lauter konzentrische helle und dunkle Kreise zeigen. Wie erwähnt, war die Messingscheibe selbst optisch auf diese Achse zentriert. Natürlich wurde nach beendeter Einstellung die Scheibe wieder entfernt.

8. Einstellen des Radiators. Auch dies erfolgte durch Schattenprojektion auf den Fluoreszenzschirm. Der eingestellte Radiator ergab auf dem Schirm ein Bild, das an eine ringförmige Sonnenfinsternis erinnert, die dunkle Projektion der Kugel, konzentrisch umsäumt von einem hellen Ringe.

3. Definition der Polarisation und Meßmethoden.

9. Definition und Maß der Polarisation. Die vom Radiator zu dem oberen Gitterkondensator kommende Sekundärstrahlung bewirke am Elektrometer einen Ausschlag von *a* Skalenteilen in der Zeit *t* bei Horizontalstellung der Röhre, in derselben Zeit *t* und den gleichen äußeren Bedingungen (Stromstärke, Röhrehärte) einen anderen Ausschlag von *b* Skalenteilen bei Vertikalstellung der Röhre. Infolge der Polarisation ist *a* von *b* verschieden.

Als Maß für die mittlere Intensität der Sekundärstrahlung setzen wir dann

$$S = \frac{a + b}{2}$$

und als Maß für die Polarisation den Unterschied zwischen *S* und *S*_{max.} (bzw. *S*_{min.})

$$\Delta = \frac{a - b}{2}.$$

Bezieht man die Polarisation Δ auf die mittlere Sekundärstrahlung S , so erhält man

$$\frac{\Delta}{S} = \frac{a - b}{a + b}.$$

Es beträgt somit die Polarisation in Prozenten der mittleren Sekundärstrahlung

$$x = 100 \cdot \frac{a - b}{a + b}.$$

10. Meßmethode. Bei allen Meßmethoden waren die Kondensatorplatten C_1 und C_2 gleichzeitig mit dem Elektrometer verbunden.

Methode I (Differentialmethode): Die Sekundärstrahlung gelangt vom Radiator zum oberen und zum seitlichen Kondensator. Infolge der Anordnung der auf entgegengesetzt gleiches Potential gehaltenen Gitter wird direkt $(a - b) = 2\Delta$ gemessen. Die Größe S bleibt bei dieser Methode unbekannt. Dagegen läßt sie lange Expositionszeiten zu (bis zu 4 Minuten), weil die Strahlung in beiden Richtungen gleichzeitig gemessen wird.

Methode II: Zwischen Radiator und seitlichem Kondensator wird eine Pb-Platte¹⁾ eingeschaltet, so daß das Elektroskop nur Ladung vom oberen Gitter her erhalten konnte. Infolge der Polarisation mußte bei horizontal gestellter Röhre die Sekundärstrahlung nach oben intensiver sein, als bei vertikaler Röhrenstellung. Bei dieser Methode werden also a und b einzeln gemessen und zwar nacheinander. Wegen der Härteänderung der Röhre verträgt diese Methode nur sehr kurze Expositionszeiten (5—10 Sekunden), bestimmt aber das wahre Verhältnis von $\Delta:S$.

Methode III: Diese Methode ist eine Kombination der beiden vorhergehenden und besteht in folgendem Verfahren:

Es wird, beispielsweise bei der Röhrenstellung 90° , die Größe $S_1 + \Delta_1 = a$ nach Methode II beobachtet. Dann wird bei derselben Röhrenstellung die Größe Δ_1 nach Methode I bestimmt. Dann wird die Röhre um 90° gedreht und nach

1) Diese Pb-Platte konnte von außen mittels eines Hebelns in den Gang der Sekundärstrahlen eingeschaltet werden. Die Kapazität des Elektrometersystems änderte sich dadurch nicht. Die Pb-Platte war geerdet.

Methode II der Wert $S_2 - \Delta_2 = b$ beobachtet. Hierbei muß darauf geachtet werden, daß die Härte der Röhre bei allen Versuchen möglichst dieselbe ist, was durch entsprechendes Regenerieren der Röhre zu erreichen ist. Dann wird bei derselben Röhrenstellung nach Methode I wieder der Wert Δ_2 gemessen. Wendet man dies Verfahren auf alle vier um 90° verschiedene Röhrenstellungen an, so erhält man:

$$\left. \begin{array}{l} S_1 + \Delta_1 = a \\ S_2 - \Delta_2 = b \\ S_3 + \Delta_3 = a' \\ S_4 - \Delta_4 = b' \end{array} \right\} \text{nach Methode II und} \quad \left. \begin{array}{l} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{array} \right\} \text{nach Methode I.}$$

Da nun die Röhrehärte bei allen Versuchen die gleiche war — wenigstens soweit dies erreichbar war —, so darf man bei den nach Methode II erhaltenen Werten setzen

$$\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2 - \Delta_4 = 0 \quad (\text{nach Methode II})$$

und

$$S = \frac{1}{4}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) = \frac{1}{4}(a + b + a' + b').$$

Aus den nach Methode I erhaltenen Werten bestimmt sich Δ durch

$$\Delta = \frac{1}{4}(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4)$$

Um genügend große Werte zu erhalten, mußte für die Werte a, b, a', b' bis zu 30 Sekunden, für die Werte $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ 1—2 Minuten exponiert werden.

Methode III bietet folgende Vorteile:

1. Läßt sie die Änderung des Verhältnisses von Δ/S für verschiedene X-Strahlen sehr deutlich und mit Sicherheit erkennen, weil sie längere Expositionzeiten verträgt, nämlich etwa 30—60 Sekunden, während Methode II nur 5—10 Sekunden zuläßt, so daß die am Elektrometer abgelesenen Werte zu klein werden.

2. Ist S und Δ bei jeder Röhrenstellung gemessen, was deshalb von Wichtigkeit ist, weil beim Drehen der Röhre ihre Härte sich etwas ändert.

Da bei Methode III alles darauf ankam, immer wieder die gleiche Härte der Röhre durch Regenerieren bzw. Erhaltenlassen herzustellen und als bestes Kriterium hierfür sich das Aussehen (Farbnuancen, Linien und Figuren) der im

Betrieb befindlichen Röhre erwies, so sind erst die späteren Versuche nach Methode III ausgeführt, da ich mir erst die nötige Erfahrung erwerben mußte. Daß nach Methode III Versuche unter gleichen Bedingungen auch gleiches Resultat ergeben, werden die Messungen beweisen.

4. Fehlerquellen.

11. a) Eine Emission sekundärer Kathodenstrahlen vom Radiator, die durch reine Bestrahlung mit X-Strahlen veranlaßt wird, kann keinen Einfluß auf die Angaben des Elektrometers haben, da die Kathodenstrahlen in Luft von Atmosphärendruck in unmittelbarer Nähe des Radiators absorbiert werden.

b) Elektrostatische Störungen. Das ganze Elektrometersystem war durch den Pb-Kasten geschützt, denn das Blättchen des Elektrometers blieb in Ruhe, sowohl wenn der Induktor allein ohne X-Strahleröhre mit 40 cm Funkenstrecke betrieben wurde, als auch wenn der Sekundärstrom des Induktors in verkehrter Richtung durch die X-Strahleröhre geschickt wurde.

c) Ionisation durch Primärstrahlen. Um zu erfahren, ob die primären X-Strahlen das Bleigehäuse noch in nennenswerter Stärke durchdringen, und durch Ionisation der Luft eine Aufladung des Elektrometerblättchens hervorrufen könnten, wurde das Diaphragma D_1 durch eine 4 mm starke Zn-Platte verschlossen. Es zeigte sich, daß das Blättchen in Ruhe blieb.

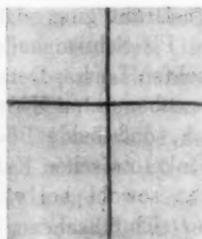
d) Ob störende Sekundärstrahlen von nicht beabsichtigten, von Primärstrahlen getroffenen Stellen ausgingen, sollten die beiden folgenden Versuche entscheiden:

Wurde die Paraffinkugel entfernt, so daß der Radiator also Luft war, so war die Bewegung des Blättchens nur äußerst gering.

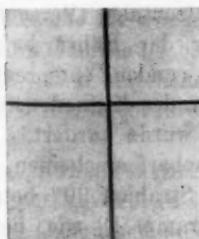
Wurde zwischen die Paraffinkugel und dem oberen Gitter ein Pb-Blech eingeschaltet, das selbst nicht von Primärstrahlen getroffen wurde, und gleichzeitig die seitliche Kondensatorplatte vom Elektrometer losgetrennt und geerdet, so blieb das Elektroskopblättchen ebenfalls in Ruhe.

e) Primärstrahlen von der Glaswand der X-Strahlröhre. Diese Strahlen wurden durch das Diaphragma D_2 so weit wie möglich abgefangen.

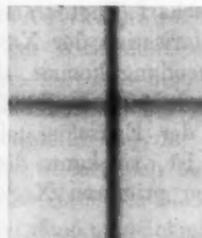
f) Astigmatismus. Ebenso wie Lichtstrahlen, die von einer nicht sphärischen Fläche ausgehen, ein astigmatisches Strahlenbündel bilden, zeigen auch X-Strahlen eine ganz analoge Erscheinung: Das Kathodenstrahlenbündel zeigt senkrecht zu seiner Achse einen nahezu kreisförmigen Quer-



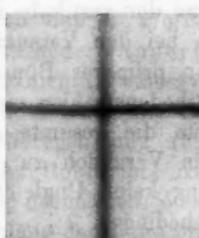
Photogramm 1.



Photogramm 2.



Photogramm 3.



Photogramm 4.

schnitt. Die Ebene der Antikathode aber liegt (bei den benutzten Röhren) unter einem Winkel von 45° gegen diese Achse. Der Schnitt des Kathodenstrahlenbündels mit der Antikathodenfläche ist somit eine Ellipse. Die große Achse jener Ellipse liegt in der Einfallsebene, wenn man analog der in der Optik üblichen Bezeichnungsweise so die Ebene nennt, die durch die Normale zur Antikathodenfläche und durch die Achse der Kathodenstrahlen geht. Daß ein

X-Strahlenbündel im allgemeinen nach jenen Achsen der Ellipse astigmatisch ist, zeigt folgender Versuch: Ein Fadenkreuz aus Pb-Draht wurde so aufgestellt, daß die Fäden horizontal und vertikal zu liegen kamen. Der Schnittpunkt der Fäden und die Mitte der Antikathode lagen auf einer horizontalen Geraden, 30 cm voneinander entfernt. 40 cm hinter dem Fadenkreuz befand sich eine photographische Platte. Die Röhre wurde so gestellt, daß die Einfallsebene einmal durch den vertikalen (Versuch 1 und 3), dann durch den horizontalen (Versuch 2 und 4) Pb-Draht ging. Unmittelbar vor der Röhre befand sich ein Pb-Schirm mit einem kleinen, runden, entsprechend angebrachten Loch. Der Winkel zwischen den Kathodenstrahlen und dem benutzten X-Strahlenbündel wurde variiert. Es ergab sich, daß beide Pb-Drähte gleich scharf erscheinen, wenn der Winkel zwischen Kathoden- und X-Strahlen 90° betrug, und zwar sowohl bei vertikaler (Photogramm 1) wie bei horizontaler Einfallsebene (Photogramm 2). Verliefen dagegen die X-Strahlen normal zur Antikathode, so erschien bei vertikaler Einfallsebene der horizontale Pb-Draht unscharf (Photogramm 3), bei horizontaler Einfallsebene der vertikale Pb-Draht unscharf (Photogramm 4).

Da bei den Versuchen über Polarisation der X-Strahlen stets ein primäres Bündel zur Verwendung kommt, das mit den Kathodenstrahlen einen Winkel von 90° einschließt, und außerdem die gesamte Ausdehnung der Emissionsstelle sehr klein im Vergleich zu der Blende ist, so kann diese Erscheinung keine Ungleichmäßigkeit im primären X-Strahlenbündel bedingen.

g) Eine keilförmige Dicke der Röhrenwandung da, wo die untersuchten X-Strahlen die Glaswand der X-Strahlerröhre durchdringen, würde in dem den Radiator treffenden Primärstrahlenbündel eine ungleiche Absorption bewirken und ein Teil des Radiators würde von intensiveren X-Strahlen getroffen werden. Folglich würde der Radiator Sekundärstrahlen aussenden, die in verschiedener Richtung verschiedene Intensität zeigen würden, und diese Asymmetrie der Sekundärstrahlung müßte mit der Drehung der Röhre mitwandern.

Daß die Polarisation der X-Strahlen nicht auf solche Weise vorgetäuscht wird, beweist der Versuch mit einer 2 mm

dicken, streng planparallelen Glasplatte, die in den Gang der Primärstrahlen eingeschaltet wurde. Die Verschiedenheit der Absorption der Primärstrahlen in der Röhrenwandung infolge der wohl bestehenden keilförmigen Dicke derselben ist jedenfalls außerordentlich klein gegenüber der Absorption der Strahlen in der planparallelen Glasplatte, so daß jene Verschiedenheit wohl fast nicht mehr wahrgenommen werden könnte, d. h. eine nur vorgetäuschte Polarisation müßte bei diesem Versuch stark abnehmen oder ganz verschwinden. Der Versuch ergab, daß die Polarisation dieselbe ist wie ohne die dazwischengeschaltete Glasplatte. Mithin sind die beobachteten Polarisationserscheinungen durch eine etwa bestehende keilförmige Dicke der Glaswandung der X-Strahlenröhre nicht beeinflußt, geschweige denn bedingt.

Dies wird auch durch die Tatsache gestützt, daß eine Bleikugel — als Radiator benutzt — keine Polarisation zeigt (vgl. § 21), wofür gar kein Grund bestände, wenn die beobachteten Erscheinungen nur eine Folge der ungleich dicken Röhrenwandung wären.

h) Wanderung der Emissionsstelle der X-Strahlen auf der Antikathode. Es zeigte sich, daß die Emissionsstelle der X-Strahlen auf der Antikathode wandert; wenn die Röhre hart ist, entstehen die X-Strahlen auf einem anderen Punkt als bei weicher Röhre; außerdem hängt die Lage der Emissionsstelle von der jeweiligen Röhrenstellung ab; wahrscheinlich ändert sich beim Drehen der Röhre ihre Kapazität infolge der Nähe des Bleikastens.¹⁾ Die durch diese Wanderung hervorgerufene ungleichmäßige Bestrahlung des Radiators wurde wie oben erwähnt durch Einfügung der Blende *D* auf ein Minimum herabgedrückt.

i) Potential des Radiators. Infolge Aussendung sekundärer Kathodenstrahlen wird ein Radiator positive elektrische Ladung besitzen. Folgende Versuche sollten entscheiden, ob vielleicht ein Einfluß eines solchen Radiatorpotentiales auf die Angaben des Elektrometers vorhanden ist.

1) Bezüglich einer möglichen Ablenkung der Kathodenstrahlen in der X-Strahlenröhre durch den Elektromagneten des Induktors ist zu bemerken, daß der Induktor hinlänglich entfernt stand.

1. Die Paraffinkugel wurde mit Stanniol überzogen und dieses geerdet. Die Sekundärstrahlung wurde dadurch schwächer, die Polarisation dadurch nicht zum Verschwinden gebracht.¹⁾

2. Eine Pb-Kugel als Radiator, die, wenn sie geerdet war, eine Polarisation nicht anzeigen (vgl. § 21), wurde auf eine Ebonitplatte gestellt und so vom Boden des Pb-Kastens isoliert. Dadurch wurde Polarisation nicht hervorgerufen; auch nicht, wenn der Radiator durch eine geriebene Siegellackstange elektrisiert wurde.

3. Analoge Versuche mit einer Al-Kugel, die Polarisation zeigt (vgl. § 18), führten zu keinem neuen Ergebnis.

k) Es war noch zu untersuchen, ob die beobachteten Polarisationserscheinungen durch Strömung ionisierter Luft, vom Radiator ausgehend, beeinflußt werden. Zwischen dem Radiator und jedem Gitter wurde je eine Al-Folie, die auf einen Rahmen gespannt und sorgfältig geerdet war, angebracht. Die Folien waren ihrem Gitter parallel; ihr Abstand vom Gitter der gleiche (2 cm). Die Dicke der Folien betrug 0,01 mm, ihre Fläche (14×14) qcm. Der Versuch zeigte, daß ein Einfluß auf die Polarisation nicht vorhanden war. Die Al-Folien wurden dann wieder entfernt.

l) In der Härteänderung der Röhre lag die störendste Fehlerquelle der Versuche, da die geringste Härteänderung eine relativ bedeutende Änderung der Intensität der Sekundärstrahlen (vgl. § 16) zur Folge hat. Dieser Umstand betrifft insbesondere die Meßmethode II und III. Möglichst lange Exposition und sorgfältige Regulierung des primären Induktionsstromes bei der leisesten Tendenz der Röhre, ihren Zustand zu ändern, waren die besten Maßregeln, um Härteänderungen der Röhre zu verhüten. — Versuche, die längere Expositionszeit erfordern — z. B. Versuche über den Einfluß absorbierender Medien, vgl. § 26 — müßten mit einer Röhre gemacht werden, die bei einer Exposition von 5—15 Minuten ihre Härte nicht nur sehr wenig, sondern überhaupt nicht ändert. — Als

1) Ein ganz analoger Versuch mit Paraffinum liquidum in einer versilberten zur Erde abgeleiteten Glaskugel ergab ein ähnliches Resultat. Wegen der etwas modifizierten Versuchsanordnung ist dieser Versuch im Zusammenhang mit den flüssigen Radiatoren angeführt.

das beste Kriterium für eine Härteänderung innerhalb des Versuches erwies sich die Beobachtung der Röhre selbst, deren Farbnuancen, Figuren usw. sich nicht ändern durften.

m) Kontaktpotential. Wie schon erwähnt (vgl. p. 814) macht sich in ionisierter Luft zwischen verschiedenen Metallen ihr Kontaktpotential bemerkbar.¹⁾ Da nun, wie später (§ 16) gezeigt wird, bei ganz geringer Härteänderung der Primärstrahlen die Intensität der Sekundärstrahlen sich beträchtlich ändert, somit der Grad der Ionisierung der Luft nicht konstant ist, ist auch die Zeit, innerhalb welcher durch die Ionisation eine Aufladung der Metalle bis zu dem jeweils vorliegenden Kontaktpotential erfolgt, bei verschiedenen Expositionen je nach der Härte der Primärstrahlen verschieden. Die Folge ist, daß der Einfluß des Kontaktpotentials auf die Angaben des Elektrometers *variabel* ist.

Zur Beseitigung der Störungen von seiten des Kontaktpotentiales waren beim Ausbau der Versuchsanordnung die schon erwähnten Maßnahmen getroffen worden.

5. Versuche.

12. Gang des Versuches. Der eigentliche Versuch verlief folgendermaßen: Nachdem alle Kontrollen der richtigen Einstellungen der Emissionsstelle der X-Strahlen und des Radiators mit Hilfe der Fadenkreuze wie oben beschrieben geprüft waren, wurde der Abstand des seitlichen Gitters G_2 von seiner Kondensatorplatte so reguliert, daß bei vertikaler und horizontaler Röhrenstellung das Elektrometer entgegengesetzt gleiche Ausschläge zeigte, folglich bei allen 45° -Zwischenstellungen das Blättchen in Ruhe blieb. Dann wurde exponiert, in der Regel 2 Minuten lang (bei Methode I), wobei die primäre Induktorkstromstärke konstant auf 3 Amp. gehalten wurde. Bei allen Versuchen wurde die Röhre in alle acht, immer um 45° voneinander verschiedene Stellungen gebracht, wobei der Drehwinkel der Röhrenstellung — vom Radiator aus gesehen — entgegengesetzt dem Sinne der Uhrzeigerbewegung gezählt wurde. Folgender Versuch galt als Fundamentalversuch, von dem alle Spezialuntersuchungen ihren Ausgang nahmen. Bei „Röhren-

1) A. Winkelmann, Wied. Ann. 66. p. 1—28. 1898.

stellung 0° verlaufen die Kathodenstrahlen vertikal von unten nach oben.

Radiator: Paraffinkugel. Exposition: 2 Min.

Röhrenstellung:	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
Skalenteile:	-9,5	+0,3	+9,9	+0,4	-9,8	+0,2	+10,5	+0,5

Das Blättchen des Elektrometers zeigt bei Vertikalstellung (0° und 180°) der Röhre negative, bei Horizontalstellung (90° und 270°) positive Ladung an.

Da das obere Gitter auf +100 Volt geladen war, das seitliche auf -100 Volt, so ergibt der Versuch, daß, wenn die Kathodenstrahlen in der X-Strahlenröhre vertikal verlaufen (Röhrenstellung 0° und 180°), die Sekundärstrahlung in horizontaler Richtung ein Maximum hat. Ist die Richtung der Kathodenstrahlen horizontal (Röhrenstellung 90° und 270°), so hat die Sekundärstrahlung ihr Maximum in vertikaler Richtung.

Wurde die Ladung der Gitter vertauscht, so änderten die Ausschläge am Elektrometer ihr Vorzeichen.

Die Empfindlichkeit des Elektrometers war 30 Skt. für 1,1 Volt (Daniellelement). — Potentialdifferenz und Ausschlag des Al-Blättchens waren bis zu 30 Skt. genügend proportional, und entgegengesetzt gleiches Potential bewirkte gleich viele Skalenteile Ausschlag nach entgegengesetzter Seite.

Nachdem erst alles, wie oben beschrieben, eingerichtet und eingestellt war, gingen die Versuche, ohne auch nur einmal zu versagen. Die Polarisationswirkung blieb dann und nur dann aus, wenn die X-Strahlenröhre aus irgend einem Grunde einmal zu hart geworden war. Die Röhre wurde durch häufiges Regenerieren im allgemeinen immer in mittelweichem Zustand (parallel geschaltete Funkenstrecke des Induktors 8—12 cm) gehalten, so daß das Bild der Hand auf dem Fluoreszenzschirm sehr kontrastreich war. So lang wie möglich wurde mit derselben Röhre gearbeitet, wenn nicht besondere Untersuchungen die Verwendung von verschiedenen Röhren nötig machten.

13. Verschiedene Radiatoren. Als wirksamster Radiator erwies sich Paraffin. Außerdem gelang es, die Polarisation nachzuweisen mit Aluminium und Schwefel, während Pb versagte.

Da das Paraffin die besten Resultate lieferte, lag es nahe, Substanzen zu untersuchen, die dem Paraffin der chemischen Natur nach sehr nahe stehen. Da Paraffin aus einem Gemenge gesättigter Kohlenwasserstoffe von der Formel C_nH_{2n+2} besteht, wurden einige Substanzen untersucht, die sich ebenfalls aus einem Gemenge von aufeinanderfolgenden Gliedern jener Kohlenwasserstoffreihe zusammensetzen, nämlich Paraffinum liquidum, Petroleum, Benzin und Petroläther. Die Versuche mit diesen flüssigen Substanzen erfordern als Radiator eine genau gearbeitete, überall gleich dicke Hohlkugel, die selbst möglichst schwache Sekundärstrahlen emittieren, dagegen für die von den Flüssigkeiten ausgehenden Sekundärstrahlen möglichst durchlässig sein soll. Aus Al, das sich hierzu wohl am besten eignen würde, war eine solche Kugel nicht zu erhalten; deshalb wurde eine (bleifreie) Glaskugel genommen. Die gleichmäßigste Wandstärke hatten die im großen hergestellten käuflichen Rundkolben (Durchmesser ≈ 6 cm). Ein solcher Kolben wurde mit dem Halse nach unten über einem tiefen Becherglas, das ganz mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt war, befestigt. Im Becherglas befand sich ein zweimal rechtwinklig gebogenes Glasrohr, das im Bedarfsfall so weit gehoben wurde, bis der eine Schenkel den obersten Punkt im Innern des Kolbens erreichte. Die Versuche waren so gedacht, daß der zentrierte Kolben nach Belieben mit der Flüssigkeit oder mit Luft gefüllt werden konnte, ohne Änderung seiner Stellung. Durch die Glasröhre wurde entweder die Luft im Kolben abgesaugt, so daß die Flüssigkeit nachstieg, oder Luft eingeblasen, die die Flüssigkeit heraustrieb. Das Ganze war so disponiert, daß nur die Kugel des Kolbens und ein kleines Stück des nach unten gerichteten Halses von Primärstrahlen getroffen werden konnte. Während des Versuches war das erwähnte Glasrohr aus dem Innern des Kolbens entfernt.

Zunächst kam *Petroleum* zur Verwendung. Die Ausführung des Versuches war folgende. Eingestellt wurde auf entgegengesetzte gleiche Ausschläge, wenn der Kolben mit Luft gefüllt war; dann wurde das Petroleum eingesaugt und die Polarisation beobachtet; schließlich wurde wieder Luft eingeblasen und die Einstellung kontrolliert, wobei zu beachten war, daß

an der Innenwand der Glaskugel noch Petroleum haftete. Oder es wurde in umgekehrter Reihenfolge eingestellt mit Petroleum, dann das Petroleum durch Luft ersetzt, dann nochmal Petroleum eingesaugt. Der Versuch ergab, daß Petroleum zum Nachweis der Polarisation nach der Differentialmethode noch wirksamer ist als Paraffin.

Außer Petroleum wurden noch die ebenfalls der Gruppe der ungesättigten Kohlenwasserstoffe angehörenden Substanzen Paraffinum liquidum, Benzin, Petroläther, Methan untersucht.

Da flüssige Radiatoren leicht herzustellen waren und außerdem den Vorteil absoluter Homogenität boten, kamen dann auch *andere Flüssigkeiten* zur Untersuchung, die ihrer chemischen Natur nach ganz verschieden waren. Die Bedingungen waren überall dieselben wie beim Petroleumversuch. Nach jedem Versuch wurde die Glaskugel sorgfältigst gereinigt. Untersucht wurde Wasser, Schwefelkohlenstoff, Äthylalkohol, Glyzerin, Äthyläther, Benzol, Nitrobenzol.

Die einzelnen Versuche sind in der Dissertation nachzusehen.

Diese Versuche hatten nicht den Zweck, die Polarisation zu messen, sondern wurden nur ausgeführt, um die Polarisation an einer Reihe von neuen Substanzen nachzuweisen; außerdem bestand die Absicht, einen Körper zu finden, der, noch wirksamer als das Paraffin, dann zur photographischen Untersuchung verwendet werden sollte.

In der folgenden Tabelle sind die am Elektrometer abgelesenen Werte für 2Δ (Methode I) für die vier Hauptstellungen der Röhre angegeben. Sämtliche hier angegebenen Zahlen beziehen sich auf Versuche, die bei derselben Härte der gleichen Röhre, bei der gleichen primären Induktorstromstärke und Expositionszeit, sowie auch bei der gleichen Elektrometerempfindlichkeit ausgeführt wurden. Es können somit die benutzten Radiatorkugeln — nicht etwa die Substanzen — in ihrer Wirkung die Polarisation nach Methode I zu zeigen wohl verglichen werden.

Die Versuchsresultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Radiator	Röhrenstellung 0°	Röhrenstellung 90°	Röhrenstellung 180°	Röhrenstellung 270°	Mittel
Blei	—	—	—	—	0,0
Luft	— 1,4	+ 0,6	— 0,1	+ 0,1	0,5
Glaskugel mit Luft .	— 1,2	+ 1,4	— 0,9	+ 1,1	1,2
Aluminium	— 1,7	+ 2,0	— 1,8	+ 2,2	1,9
Schwefel	— 1,2	+ 2,8	— 1,8	+ 2,8	2,0
Schwefelkohlenstoff ¹⁾ .	— 3,3	+ 2,8	— 3,5	+ 3,2	3,2
Nitrobenzol ¹⁾	— 5,7	+ 5,0	— 5,6	+ 5,0	5,3
Petroläther ¹⁾	— 7,0	+ 5,8	— 5,2	+ 5,6	5,9
Paraffinum liquidum ¹⁾	— 6,2	+ 6,1	— 6,6	+ 7,0	6,5
Wasser (dest.) ¹⁾ . . .	— 7,3	+ 6,2	— 9,5	+ 7,7	7,7
Glycerin ¹⁾	— 14,4	+ 5,2	— 11,0	+ 5,1	8,9
Äthylalkohol ¹⁾	— 11,1	+ 8,8	— 10,7	+ 6,5	9,3
Benzol ¹⁾	— 13,0	+ 11,8	— 9,2	+ 10,4	11,1
Benzin ¹⁾	— 13,5	+ 8,0	— 12,8	+ 11,3	11,4
Äthyläther ¹⁾	— 23,0	+ 8,1	— 15,0	+ 8,0	11,5
Paraffin	— 12,7	+ 11,5	— 10,3	+ 12,4	11,7
Petroleum ¹⁾	— 15,8	+ 18,0	— 12,0	+ 15,0	15,2

Bemerkung: Da hier die Intensität der Sekundärstrahlung selbst nicht bekannt ist, so liefert obige Reihenfolge, die nach wachsendem A geordnet ist, nicht zugleich die Reihe, in welcher diese Stoffe die Polarisation relativ zur Sekundärstrahlung anzeigen.

14. Folgende Versuchsergebnisse sind hier noch zu erwähnen:

a) Es zeigte sich, daß die Intensität der Sekundärstrahlung der Paraffinkugel mindestens gleich, wenn nicht größer war als die der Pb-Kugel, was sich durch unmittelbare Beobachtung der Sekundärstrahlen auf dem Fluoreszenzschild oder am Elektroskop erkennen ließ, während doch die Intensität der Sekundärstrahlen proportional dem Atomgewicht des Radiators sein soll.²⁾ Indessen zeigten spätere Versuche, daß ein sehr großer Teil der Sekundärstrahlen des Paraffins aus dem Inneren kommt, d. h. die Absorption des Paraffins für vom Paraffin ausgehende Strahlen sehr gering ist. Bei der Pb-Kugel dagegen entstehen nur an der Oberfläche Sekundärstrahlen,

1) In der Glaskugel.

2) A. Roiti, Atti R. Acc. dei Lincei (5) 7. p. 87—91. 1. Sem. 1898.

weil die Primärstrahlen nur in geringe Tiefe eindringen, die dort entstehenden Sekundärstrahlen aber wohl kaum die Oberfläche erreichen.

b) Eine Funkenstrecke wurde in die Stromleitung zur Anode-Antikathode eingelegt, wodurch keine Änderung im Verlauf der Erscheinung hervorgerufen wurde; ebensowenig, wenn die Funkenstrecke in der Zuleitung zur Kathode war.

6. Messungen.

Es wurde nun zur quantitativen Bestimmung der Polarisation übergegangen; die neue Röhre, die dabei zunächst zur Verwendung kam, möge als Röhre I bezeichnet werden.

15. Polarisation der Paraffinkugel bei weichen Strahlen der Röhre I.

a) Methode I. Exposition: 120 Sek.

Röhrenstellung:	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
Skalenteile:	-31,0	0	+49,0	+3,4	-37,0	-0,3	+38,0	+1,6

Mittelwert von $(a - b) = 2 \Delta = 39$ Skt.,

somit ist $\Delta = 19,5$ Skt. bei 120 Sek. Exposition.

b) Methode II. Exposition: 5 Sek.

Röhrenstellung:	90°	0°	90°	90°	0°	0°
Skalenteile:	8,5	6,5	9,2	9,1	7,5	7,5

Mittelwert der Stellung von 90° (horiz.): $a = S + \Delta = 8,9$ Skt.,

" " " " 0° (vertik.): $b = S - \Delta = 7,2$ "

somit ist $S = 8,1$ Skt. in 5 Sek., $\Delta = 0,9$ Skt. in 5 Sek.; die Polarisation beträgt demnach bei den genannten Bedingungen

$$x = 100 \cdot \frac{\Delta}{S} = 11 \text{ Proz.}$$

c) Vergleich der nach den beiden Methoden erhaltenen Werte von Δ :

Methode II ergab für Δ den Wert $\Delta_{II} = 0,9$ Skt. bei 5 Sek. Exposition

" I " " " " " $\Delta_I = 19,5$ " " 120 " "

folglich beträgt Δ_I bei 5 Sek. Exposition 0,8 Skt.

Resultat: Die Polarisation der Paraffinkugel beträgt bei weichen Strahlen der Röhre I 11 Proz.

16. Polarisation bei *harten* und *weichen* Strahlen der Röhre I. Die folgenden Messungen sind unmittelbar hintereinander bei sechs verschiedenen Härtezuständen der Röhre I nach Methode II ausgeführt. Jedesmal ist die Länge

der zur Röhre parallel geschalteten Funkenstrecke angegeben, bei der die Entladung des Induktors sich einteilt gleichzeitig in die Entladung durch die Funkenstrecke und in die Entladung durch die Röhre, so daß also die Funken kontinuierlich übergehen und die Röhre gleichmäßig leuchtet. Die Expositionszeit wurde möglichst kurz (5 Sek.) gewählt, um innerhalb eines jeden Versuches konstante Röhrenhärte zu erhalten. Als Radiator diente die Paraffinkugel. Zur Ausführung der Messung wurde ein Sekundenklopfen benutzt.

a) Sehr weiche Strahlen. Parallelle Funkenstrecke 4 cm. Das Bild der Hand, auf den Bariumplatinicyanförschirm betrachtet, erscheint als ganz schwarze Silhouette („Schornsteinfinger“).

Methode II.¹⁾ Exposition: 5 Sek.

Röhrenstellung:	0°	90°	90°	0°	0°	90°	45°
Skalenteile:	3,0	5,0	5,0	4,0	4,0	5,0	4,5

$S = 4,4 \text{ Skt.}$ } in 5 Sek. $x = 100 \cdot \frac{d}{S} = 16 \text{ Proz. Polarisation.}$
 $d = 0,7 \text{ "}$ }

b) Weiche Strahlen; parallele Funkenstrecke: 5 cm.

Methode II. Expositionszeit: 5 Sek.

Röhrenstellung:	0°	0°	90°	90°	0°	90°	45°
Skalenteile:	5,5	6,0	7,0	7,5	6,0	8,0	7,0

$S = 6,7 \text{ Skt.}$ } in 5 Sek. $x = 100 \cdot \frac{d}{S} = 13 \text{ Proz. Polarisation.}$
 $d = 0,9 \text{ "}$ }

c) Mittelweiche Strahlen; parallele Funkenstrecke: 6 cm.

Methode II. Exposition: 5 Sek.

Röhrenstellung:	90°	90°	0°	0°	90°	0°	45°
Skalenteile:	9,5	9,5	7,5	7,5	9,0	8,0	8,5

$S = 8,5 \text{ Skt.}$ } in 5 Sek. $x = 100 \cdot \frac{d}{S} = 9 \text{ Proz. Polarisation.}$
 $d = 0,8 \text{ "}$ }

d) Mittelharte Strahlen; parallele Funkenstrecke: 8 cm.

Methode II. Exposition: 5 Sek.

Röhrenstellung:	90°	90°	0°	0°	90°	0°	45°
Skalenteile:	12,0	12,5	10,0	10,5	13,0	11,0	11,8

$S = 11,5 \text{ Skt.}$ } in 5 Sek. $x = 100 \cdot \frac{d}{S} = 8 \text{ Proz. Polarisation.}$
 $d = 1 \text{ "}$ }

e) Harte Strahlen, parallele Funkenstrecke: 12 cm.

Methode II. Exposition: 5 Sek.

Röhrenstellung:	90°	90°	0°	0°	90°	0°	45°
Skalenteile:	16,5	17,0	16,0	16,0	16,5	15,5	16,0

$S = 16,3 \text{ Skt.}$ } in 5 Sek. $x = 100 \cdot \frac{d}{S} = 3 \text{ Proz. Polarisation.}$
 $d = 0,5 \text{ "}$ }

1) Bei diesen äußerst weichen Strahlen versagt Methode I; dieselbe erfordert größere Expositionszeit, wodurch die Röhre härter wird — oder unbrauchbar.

f) Sehr harte Strahlen; parallele Funkenstrecke: 20 cm.

Methode II. Exposition: 5 Sek.

Röhrenstellung:	90°	90°	0°	0°	90°	0°	45°
Skalenteile:	16,5	16,5	16,0	15,5	16,0	15,5	16,0

$$S = 16,0 \text{ Skt.} \quad \left. \begin{matrix} \\ \Delta = 0,3 \end{matrix} \right\} \text{in 5 Sek.} \quad x = 100 \cdot \frac{\Delta}{S} = 2 \text{ Proz. Polarisation.}$$

Diese Versuche zeigen folgendes:

1. Mit zunehmender Härte der Röhre nimmt die Intensität der Sekundärstrahlung bedeutend zu.¹⁾ Eine scheinbare Ausnahme zeigen die Versuche unter f), wo keine weitere Zunahme der Sekundärstrahlung zu bemerken ist. Jedoch ist zu beachten, daß bei harten Strahlen die Stromstärke im primären Induktorstromkreis um $\frac{2}{5}$ und mehr geringer ist als bei weichen Strahlen. Ein Überspringen von Funken am Induktor oder den Elektroden der Röhre wurde zwar vermieden, jedoch war am Knistern der Röhre zu erkennen, daß ein gut Teil der Entladungen verloren ging.

2. Mit zunehmender Härte der Röhre nimmt die Polarisation ab, verschwindet jedoch nicht, was durch die Methode I mit Sicherheit weiter unten nachgewiesen werden wird.

3. Bei den mittelweichen Strahlen der Röhre I läßt sich durch Paraffin 10 Proz. Polarisation nachweisen, d. h. betrüge die Sekundärstrahlung der Paraffinkugel, wenn gar keine Polarisation vorhanden wäre, in jeder Richtung 100 Einheiten, so ist ihre Intensität infolge der Polarisation parallel den Kathodenstrahlen 90 Einheiten, senkrecht dazu 110 Einheiten.

17. Polarisation der Paraffinkugel bei harten Strahlen mittels Methode I nachweisbar. Die geringe Polarisation bei sehr harten Strahlen verleiht den unter f) im vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Werten immerhin einige Unsicherheit. Wenn auch der Verlauf des Versuches derselbe ist, wie der der anderen a) bis e), so ist doch ein Unterschied von 0,5 Skt. recht unbedeutend, so daß man auch glauben könnte, die Polarisation verschwindet überhaupt bei

1) Durch diese Tatsache wurden die Messungen sehr erschwert, zumal wenn — wie bei den später angegebenen Absorptionsversuchen — länger exponiert werden mußte. Extreme Härteänderungen machen den Wert von S mehr als 3 mal so groß.

harten Strahlen. Daß dies sicher nicht der Fall ist, beweisen die Messungen nach der Methode I (Differentialmethode), die hier folgen mögen. Bei diesen Versuchen wurde 1 Min. exponiert, also 12 mal länger als bei den Versuchen nach Methode II.

a) Mittelweiche Strahlen. Parallelle Funkenstrecke: 6 cm.

Methode I. Exposition: 60 Sek.

Röhrenstellung:	45°	90°	180°	270°	360°
Skalenteile:	+0,2	+15,0	-20,5	+18,0	-17,5

Mittelwert von $(a - b) = 2 A = 18$ Skt. $A = 9$ Skt.

b) Mittelharte Strahlen. Parallelle Funkenstrecke: 8 cm.

Methode I. Exposition: 60 Sek.

Röhrenstellung:	45°	90°	180°	270°	360°
Skalenteile:	+0,8	+21,5	-20,0	+20,5	-22,0

Mittelwert von $(a - b) = 2 A = 21$ Skt. $A = 10,5$ Skt.

c) Harte Strahlen. Parallelle Funkenstrecke: 12 cm.

Methode I. Exposition: 60 Sek.

Röhrenstellung:	45°	90°	180°	270°	360°
Skalenteile:	+1,5	+14,0	-13,5	+15,0	-15,5

Mittelwert von $(a - b) = 2 A = 14,5$ Skt. $A = 7,2$ Skt.

d) Sehr harte Strahlen. Parallelle Funkenstrecke: 20 cm.

Methode I. Exposition: 60 Sek. Röhre äußerst hart.

Röhrenstellung:	45°	90°	180°	270°	360°
Skalenteile:	2,5 ¹⁾	+8,0	-6,0	+9,0	-5,0

Mittelwert von $(a - b) = 2 A = 7$ Skt. $A = 3,5$ Skt.

Resultat: Die Polarisation verschwindet auch bei den härtesten Strahlen nicht völlig.

18. Aluminium. Bei den Versuchen mit einer Aluminiumkugel als Radiator machte sich eine Erscheinung störend bemerkbar, die vermutlich mit dem Einfluß des Kontaktpotentiales zusammenhängt, auf den in § 11 hingewiesen wurde. Wenn bei weichen X-Strahlen auf entgegengesetzt gleiche Ausschläge am Elektrometer eingestellt war (vgl. graphische Darstellung 1, Kurve I), dann zeigte sich für harte Strahlen eine Asymmetrie der Ausschläge (Kurve II) in dem Sinne einer negativen Ladung des Elektrometers.

1) Statt Null! Die harten Strahlen gehen wohl durch den Pb-Schirm T hindurch.

Da Al gegen Pb, woraus Gitter und Kondensatorplatten bestanden, negativ elektrisch ist, so kann dies Resultat wahrscheinlich so gedeutet werden, als ob in stärker ionisierter Luft (bei harten Strahlen, vgl. § 16) jene negative Elektrizität rascher an die Kondensatorplatten gelangt als in schwächer ionisierter.

a) Mittelweiche Strahlen. Parallelle Funkenstrecke: 7 cm.

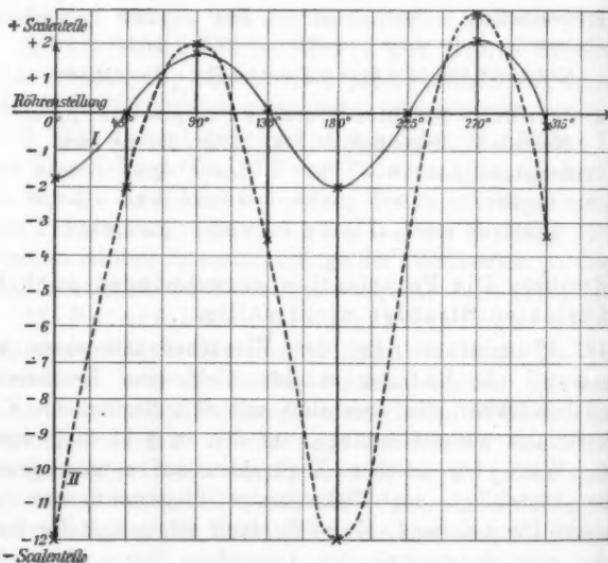
Methode I. Exposition: 2 Min.

Röhrenstellung:	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
Skalenteile:	-1,7	0,0	+1,7	+0,2	-2,0	-0,1	+2,1	-0,3

b) Härtere Strahlen. Parallelle Funkenstrecke: 10 cm.

Methode I. Exposition: 2 Min.

Röhrenstellung:	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
Skalenteile:	-12,0	-2,2	+2,0	-3,5	-12,0	negativ	+3,0	-3,5



Graph. Darstellung 1. Einfluß des Kontaktspotentials (Al-Pb).
Radiator: Aluminiumkugel. Exposition: 2 Min.

I. Weiche Strahlen. II. Harte Strahlen. Eingestellt wurde auf entgegengesetzte gleiche Ausschläge bei weichen Strahlen (Kurve I).

Somit gilt bei Al die Gittereinstellung immer nur für einen Härtezustand der Röhre.

19. Polarisation der Aluminiumkugel bei weichen und harten Strahlen der Röhre I. Gemessen wurde nach Methode II, exponiert 10 Sek.

a) Mittelweiche Strahlen. Parallele Funkenstrecke: 6 cm.
Methode II. Exposition: 10 Sek.

Röhrenstellung: 90° 90° 0° 0° 90° 0° 45°

Skalenteile: 7,0 7,0 6,0 6,0 7,0 6,5 6,5

$$\begin{aligned} S &= 6,6 \text{ Skt.} \\ A &= 0,4 \quad , \end{aligned} \left. \right\} \text{in 10 Sek.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 6 \text{ Proz. Polarisation.}$$

b) Mittelharte Strahlen. Parallele Funkenstrecke: 9 cm.
Methode II. Exposition: 10 Sek.

Röhrenstellung: 90° 90° 0° 0° 90° 0° 90° 0° 90° 0°

Skalenteile: 11,5 11,5 10,0 10,0 10,0 10,0 11,0 11,0 12,0 11,0

$$\begin{aligned} S &= 10,9 \text{ Skt.} \\ A &= 0,4 \quad , \end{aligned} \left. \right\} \text{in 10 Sek.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 4 \text{ Proz. Polarisation.}$$

c) Harte Strahlen. Parallele Funkenstrecke: 12 cm.
Methode II. Exposition: 10 Sek.

Röhrenstellung: 90° 90° 0° 0° 90° 0° 45°

Skalenteile: 17,5 18,5 17,5 17,5 19,5 17,5 18,0

$$\begin{aligned} S &= 18 \text{ Skt.} \\ A &= 0,5 \quad , \end{aligned} \left. \right\} \text{in 10 Sek.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 3 \text{ Proz. Polarisation.}$$

d) Sehr harte Strahlen. Parallele Funkenstrecke: 16 cm.
Methode II. Exposition: 10 Sek.

Röhrenstellung: 0° 0° 90° 90°

Skalenteile: 20,0 21,0 20,0 21,0

Nach Methode II ist hier die Polarisation nicht mehr nachweisbar; daß sie aber bei dieser Härte der Strahlen noch vorhanden ist, zeigen die Ergebnisse der Methode I.

Resultat: Bei den mittleren Strahlen der Röhre I läßt sich durch Al 5 Proz. Polarisation nachweisen.

Wendet man auf die Zahlen, die Barkla¹⁾ über seine Versuche mit Al angibt, unsere Art der Definition der Polari-

1) C. G. Barkla, Phil. Trans. (A) 204. p. 475. 1905.

sation an, so ergibt sich aus seinen Werten ebenfalls 5 Proz. Polarisation für Al. — Paraffin hat Barkla nicht untersucht.

20. Luft. Wurde als Radiator die Luft benutzt, so wurde es schon recht schwierig, auf entgegengesetzt gleiche Ausschläge durch minimale Verrückung des seitlichen Gitters einzustellen.

Mittelweiche Strahlen. Methode I. Exposition: 2 Min.

Röhrenstellung:	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
Skalenteile:	-0,9	0,0	+1,2	-0,1	-0,8	0,0	+1,0	-0,3

Resultat: Mit Luft ist die Polarisation nachweisbar; sie ist aber zu gering, um nach Methode II gemessen werden zu können. Methode I ergibt für Δ den Wert 0,5 Skt.

21. Blei. Die Pb-Kugel war geerdet. Nach Methode I ergab sich bei 2 Min. Exposition für

a) Mittelweiche Strahlen. Methode I. Exposition: 2 Min.

Röhrenstellung:	0°	40°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
Skalenteile:	-1,1	Null	+1,2	Null	-1,2	Null	+1,3	-0,3

$\Delta = 0,6$ Skt.

Die Einstellung auf entgegengesetzt gleiche Skalenteile war schwierig.

b) Harte Strahlen. Parallelle Funkenstrecke: 16 cm.

Methode I. Exposition: 2 Min. Gitterstellung unverändert.

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°
Skalenteile:	-3,5	+2,3	-1,5	+0,6

Die Differentialmethode ergibt somit in beiden Fällen Polarisation, wenn die Pb-Kugel als Radiator eingesetzt ist. Um zu entscheiden, ob die beobachtete Polarisation der Pb-Kugel selbst oder der sie umgebenden Lufthülle zukommt, wurde der Pb-Radiator entfernt und der Versuch bei unverändertem Gitterabstand und mit mittelweichen Strahlen wiederholt. Es ergab sich bei 2 Min. Exposition:

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°
Skalenteile:	-1,3	+0,9	-4,8	-0,6

Der relativ große Wert von $-4,8$ Skt. bei der Röhrenstellung 180° und das Vorzeichen des Wertes bei der Röhrenstellung 270° beweisen, daß bei diesem letzten Versuch die Einstellung auf entgegengesetzt gleiche Ausschläge nicht mehr stimmt, was doch der Fall sein müßte, wenn die beobachtete Polarisation bei Versuch a) von der Lufthülle ausgeginge. Bei Versuch a) ist das strahlende Luftquantum sehr gering, beim Versuch in § 20 dagegen doch viel größer; trotzdem sind die aus den beiden Versuchen resultierenden Werte von A nicht sehr verschieden.

Dies führt zu dem Schluß, daß Pb die Polarisation doch minimal zu zeigen vermag. Die Methode II versagt, wenn Pb als Radiator dient, völlig.

Resultat: Mit Sicherheit ist die Polarisation bei Pb nicht nachweisbar; doch scheint eine Spur davon vorhanden zu sein.

Wurde in den Gang der Primärstrahlen eine Platte aus Paraffin (4 cm dick) gebracht, so war die Polarisation mit Pb gerade so unsicher nachzuweisen wie ohne die Paraffinplatte.

22. *Blei mit Paraffin überzogen.* Darüber wurden bei mittelweichen Strahlen folgende Messungen nach Methode I bei 2 Min. Exposition ausgeführt.

a) Blanke Pb-Kugel ohne Paraffinüberzug.

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°
Skalenteile:	-1,1	+1,2	-1,2	+1,3

$$A = 0,6 \text{ Skt. in 2 Min.}$$

b) Pb-Kugel mit Paraffinüberzug von 0,25 mm Dicke.

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°
Skalenteile:	-2,0	+1,8	-1,9	+1,6

$$A = 0,9 \text{ Skt. in 2 Min.}$$

c) Pb-Kugel mit Paraffinüberzug von 0,5 mm Dicke.

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°
Skalenteile:	-2,0	+4,5	-2,0	+6,0

$$A = 1,8 \text{ Skt. in 2 Min.}$$

d) Pb-Kugel mit Paraffinüberzug von 0,8 mm Dicke.

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°
Skalenteile:	-8,5	+6,2	-4,5	+7,0

$$\Delta = 2,7 \text{ Skt. in 2 Min.}$$

e) Pb-Kugel mit Paraffinüberzug von 1,25 mm Dicke.

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°
Skalenteile:	-5,8	+6,5	-7,0	+9,0

$$\Delta = 3,5 \text{ Skt. in 2 Min.}$$

f) Pb-Kugel mit Paraffinüberzug von 2 mm Dicke.

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°
Skalenteile:	-8,5	+9,5	-9,0	+11,0

$$\Delta = 4,8 \text{ Skt. in 2 Min.}$$

Erst nachdem der Paraffinüberzug diese Stärke erreicht hatte, war nach Methode II ein Resultat zu erhalten. Der Versuch ergab folgendes:

Pb-Kugel mit Paraffinüberzug von 2 mm Dicke.

Methode II. Exposition: 5 Sek.

Röhrenstellung:	90°	90°	0°	0°	90°	45°
Skalenteile:	4,0	4,1	3,2	8,7	4,4	4,0

$$S = 8,8 \text{ Skt. } \left. \right\} \text{ in 5 Sek.} \quad x = 100 \cdot \frac{\Delta}{S} = 10 \text{ Proz. Polarisation.}$$

$$\Delta = 0,4 \text{ , , }$$

Dieser Wert ist aber wegen des geringen Unterschiedes unsicher.

g) Zum Vergleich diene die massive Paraffinkugel selbst.

Methode I. Mittelweiche Strahlen. Exposition: 2 Min.

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°
Skalenteile:	-26	+21	-30	+26

$$\Delta = 12,9 \text{ Skt. in 2 Min.}$$

Resultat: Je dicker der Paraffinüberzug, desto mehr Polarisation zeigt die paraffinierte Pb-Kugel an; hinreichend ist bereits die Dicke von 0,25 mm.

Die einzelnen Versuchsresultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Stärke der Paraffin-	<i>A</i>
schicht in mm	in Skalenteilen
0	0,6
0,25	0,9
0,5	1,8
0,8	2,7
1,25	3,5
2,0	4,8
Massive Paraffinkugel	12,9
(Radius 2,5 cm)	

23. Sekundärstrahlung aus dem Innern des Radiators. Von Interesse war die Frage, ob die Sekundärstrahlung des Paraffins hauptsächlich nur von der Oberfläche des Radiators ausgeht oder auch beträchtlich vom Innern, im Gegensatz zu der paraffinierten Pb-Kugel, bei der, wie die Versuche von § 22 ergaben, die Strahlung zum größten Teil von der Oberfläche ausgeht.

Darüber wurden folgende Versuche angestellt, bei denen anstatt der Kugel als Radiator eine Paraffinplatte mit parallelen Seitenflächen diente. Die Platte hatte die Dimension $9 \times 9 \times 4$ ccm, war also größer als der Querschnitt des Primärstrahlenbündels; sie kam senkrecht gegen die X-Achse zu stehen. Auf der Rückseite war diagonal durch den Mittelpunkt ein Kreuz aus Pb-Draht eingelassen, um den Mittelpunkt der Platte in die X-Achse einstellen zu können. Die Ebene ihrer Vorderseite, verlängert gedacht, traf die Kondensatorplatten in der Mitte.

I. Zunächst wurde nun nach Methode II bestimmt, wieviel Polarisation die Platte bei mittelweichen Strahlen zu zeigen vermag.

Methode II. Mittelweiche Strahlen. Exposition: 5 Sek.

Röhrenstellung: 90° 90° 0° 0° 90° 0°

Skalenteile: 6,5 7,0 6,0 6,2 8,0 6,5

Röhrenstellung: 0° 0° 90° 90° 0° 90°

Skalenteile: 7,0 7,5 10,5 11,0 8,7 13,0

$$\begin{aligned} S &= 8,2 \text{ Skt.} \\ A &= 1,2 \text{ " } \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{ in 5 Sek.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 14 \text{ Proz. Polarisation.}$$

Die Polarisation der Paraffinkugel hatte bei mittelweichen-weichen Strahlen 10—18 Proz. betragen.

II. Nun galt es, zu entscheiden, ob die Paraffinstrahlung in der Hauptsache von der Oberfläche des Radiators ausgeht, oder vom Innern. Da nur Vorder- und Rückfläche der Paraffinplatte von Primärstrahlen getroffen wurden, konnten die anderen Flächen mit Pb bedeckt werden, ohne daß dieses selbst Sekundärstrahlen aussandte. Es wurden folgende Versuche bei mittelweichen Strahlen nach Methode I gemacht.

a) Alle Flächen der Paraffinplatte von Pb frei.

Expositionszeit	vertikale Röhre	horizontale Röhre
0 Sek.	0,0 Skt.	0,0 Skt.
30 "	- 5,0 "	+ 5,0 "
60 "	- 11,5 "	+ 11,0 "

b) Obere Fläche mit Pb bedeckt.

Expositionszeit	vertikale Röhre	horizontale Röhre
0 Sek.	0,0 Skt.	0,0 Skt.
30 "	- 30,5 "	- 48,5 "

Die von der Vorder- und Rückseite der Paraffinplatte ausgehenden Strahlen können durch die Luft ungehindert zum positiven und negativen Gitter gelangen. Wären nur diese Strahlen vorhanden, so müßte das Elektrometer bei horizontaler Röhrenstellung und bedeckter oberer Fläche positiven Wert zeigen. Da es aber einen negativen Wert angibt, so folgt, daß die Sekundärstrahlung zum weitaus überwiegenden Teil aus dem Innern des Radiators kommt; diese Strahlen können zum oberen (positiven) Gitter wegen des Pb-Bleches nicht gelangen, sondern nur zum seitlichen (negativen) Gitter, nachdem sie das Paraffin durchdrungen haben.

c) Obere Fläche frei; die dem seitlichen Gitter zugewandte Fläche mit Pb bedeckt.

Expositionszeit	vertikale Röhre	horizontale Röhre
0 Sek.	0,0 Skt.	0,0 Skt.
30 "	+ 24,0 "	+ 32,5 "

Die Strahlung kommt also auch aus dem Innern, geht durch das Paraffin hindurch und kann nur zum oberen (positiven) Gitter gelangen.

d) Obere Fläche, Seitenfläche und Rückfläche mit Pb umgeben.

Die Dicke des Pb-Bleches war 3 mm, so daß nur wenig primäre Strahlung durch das Pb hindurch gehen konnte; die auf der Rückseite des Pb-Bleches entstehenden Sekundärstrahlen waren somit äußerst schwach; zudem konnten die meisten von ihnen das Gitter nicht einmal treffen.

Expositionszeit	vertikale Röhre	horizontale Röhre
0 Sek.	0,0 Skt.	0,0 Skt.
30 "	0,0 "	0,0 "
60 "	-0,2 "	+0,2 "
90 "	-0,3 "	+0,3 "
120 "	-0,4 "	+0,4 "

Hier kommt die Strahlung von der Vorderfläche; sie zeigt Polarisation, aber äußerst wenig.

e) Paraffinplatte wieder vollständig von Pb frei.

Expositionszeit	vertikale Röhre	horizontale Röhre
0 Sek.	0 Skt.	0,0 Skt.
30 "	-9,0 "	+6,0 "
60 "	-16,0 "	+13,0 "

Polarisation wie gewöhnlich.

Resultat: Bei Paraffin kommt die Sekundärstrahlung zum größten Teil aus dem Innern.

24. Sekundärstrahlen unter *schiefem* Winkel gegen die X-Achse emittiert. In den bisherigen Versuchen wurden stets Sekundärstrahlenbündel untersucht, die ziemlich senkrecht zur X-Achse emittiert wurden. Es hatte sich gezeigt, daß infolge der Polarisation der X-Strahlen z. B. bei horizontaler Röhrenstellung die senkrecht zur X-Achse emittierten Sekundärstrahlen in vertikaler Richtung größere Intensität besitzen als in horizontaler Richtung. Wie verhielt sich nun bei dieser Röhrenstellung die schief zur X-Achse emittierte Sekundärstrahlung? Zeigte auch ihre Intensität in der Horizontalebene (gelegt durch den Radiatormittelpunkt) ein Minimum, und in der Vertikalebene (durch den Radiatormittelpunkt) ein Maximum? Dieser Frage galten die folgenden Versuche, in denen

die Sekundärstrahlung, die der Radiator schief gegen die X -Achse emittiert, innerhalb der Horizontalebene und innerhalb der Vertikalebene — beide Ebenen durch den Radiatormittelpunkt gelegt — untersucht wurde. Als Radiator diente bei diesen Versuchen eine runde Scheibe aus Paraffin von 1 cm Dicke, die stets senkrecht zur X -Achse zu stehen kam. Diesem Radiator wurden folgende Stellungen gegeben, die als Stellung I, II und III bezeichnet werden mögen und in den Figg. 4, 5 und 6 schematisch gezeichnet sind.

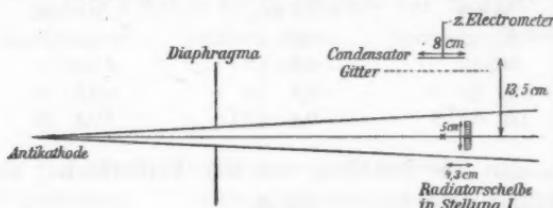


Fig. 4.

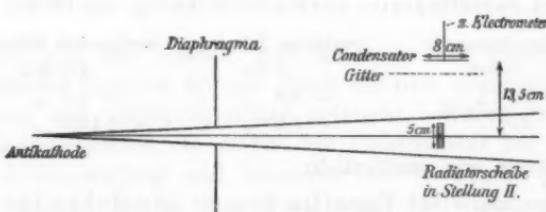


Fig. 5.

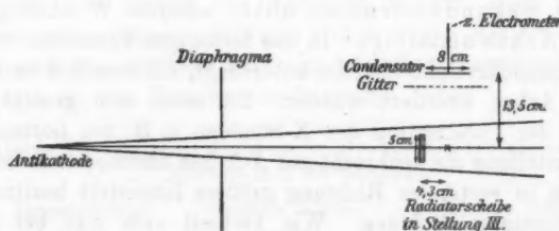


Fig. 6.

Maßstab der Figg. 4, 5 und 6: 1 : 12,5.

Stellung I. Der Abstand der Scheibe von der Antikathode ist größer als der normale, d. h. als der Abstand,

den bei allen anderen Versuchen der Radiator hatte. Die Ebene, senkrecht zur Achse der Primärstrahlen durch den Scheibenmittelpunkt gedacht, trifft die Kondensatorplatten nicht.

Stellung II. Der Abstand der Scheibe von der Antikathode ist der normale, so daß jene Ebene durch den Scheibenmittelpunkt die Kondensatorplatten in der Mitte trifft.

Stellung III. Der Abstand der Scheibe von der Antikathode ist kleiner als der normale. Jene Ebene durch den Scheibenmittelpunkt trifft die Kondensatorplatten nicht.

In Stellung I und III sind die Sekundärstrahlen, welche die Kondensatorplatten treffen, gegen die X-Achse unter dem Winkel von 72° geneigt, in Stellung II unter rechtem Winkel.

Zunächst wurde bei ungeänderter Röhrenstellung nach Methode II die die obere Kondensatorplatte treffende Sekundärstrahlung in den drei Radiatorstellungen gemessen. Die Versuche ergaben bei *mittelweichen Strahlen*:

a) Röhrenstellung vertikal.

Mittelweiche Strahlen. Exposition: 5 Sek.

Scheibenstellung	I	II	III	I
1. Messung	2,5	3,0	3,2	2,5 Skt.
2. Messung	3,0	3,7	4,3	3,5 "
3. Messung ¹⁾	2,5	3,0	3,0	2,5 "
4. Messung	2,5	3,0	3,5	3,0 "

Um diese Zahlen miteinander vergleichen zu können, müssen noch folgende Korrekturen angebracht werden.

1. Die Intensität der primären X-Strahlen nimmt proportional dem Quadrat der Entfernung ab. Infolgedessen ist die Energie der den Radiator treffenden Strahlung in den drei Stellungen eine verschiedene. Der Abstand Mitte der Antikathode – Radiator in Stellung II beträgt 73 cm. Durch die Verschiebung des Radiators in die Stellungen I oder III wird dieser Abstand um $\pm 4,3$ cm geändert. Daraus berechnet

1) Röhre regeneriert.

sich die Zahl 1,12, mit der die Werte in Stellung I multipliziert werden müssen, und die Zahl 1,13, mit der die Werte in Stellung III dividiert werden müssen, um die Variation der Primärstrahlenintensität zu eliminieren, und alle Werte auf die Energiestrahlung zu beziehen, die den Radiator in Stellung II trifft. Die folgende Tabelle enthält die so reduzierten Werte und zugleich die durch Härteänderung der Röhre erzeugte Variation der Sekundärstrahlen, die durch die Vergleichung der beiden Werte in den zeitlich verschiedenen Stellungen I bestimmt ist.

Scheiben- stellung } I II III Härte- änderung Mittel aus Stellungen I u. III
1. Messung 2,8 3,0 2,8 0,0 2,8 Skt.
2. „ 3,4 3,7 3,8 +0,5 3,6 „
3. „ 2,8 3,0 2,7 0,0 2,7 „
4. „ 2,8 3,0 3,1 +0,5 2,9 „

2. Die Entfernung Radiatormittelpunkt-Mitte der Kondensatorplatte ist bei Stellung I und III größer als bei Stellung II. Läßt man auch für die Sekundärstrahlen das Gesetz gelten, daß ihre Energie proportional dem Quadrat der Entfernung abnimmt, so müssen die Werte in Stellung I und III mit der Zahl 1,1 multipliziert werden, um alle Werte auf die Entfernung Radiator in Stellung II-Kondensatorplatte zu beziehen. Man erhält dann folgende Werte:

Intensität der emittierten Sekundärstrahlen

Scheiben- stellung	senkrecht gegen die X-Achse	schief gegen die X-Achse	Härte- änderung
1. Messung	3,0	3,0	0,0 Skt.
2. „	3,7	3,9	+0,5 „
3. „	3,0	3,0	0,0 „
4. „	3,0	3,2	+0,5 „

Somit ist an der bei vertikaler Röhrenstellung nach oben emittierten Sekundärstrahlung eine Intensitätsverschiedenheit in senkrechter und schiefer Richtung bei 5 Sek. Expositionszeit nicht zu bemerken.

b) Röhrenstellung horizontal.

Mittelweiche Strahlen. Exposition: 5 Sek.

Nach Anbringung der genannten Korrekturen ergab diese Messung:

Intensität der emittierten Sekundärstrahlen

Scheiben- stellung	senkrecht gegen die X-Achse	schief gegen die X-Achse	Härte- änderung
1. Messung	4,0	4,4	+0,5 Skt.
2. "	2,5	2,5	+0,2 "
3. "	3,0	3,2	+0,3 "
4. "	3,0	3,1	+0,3 "

Auch bei horizontaler Röhrenstellung ist an der nach oben emittierten Sekundärstrahlung eine Intensitätsverschiedenheit in senkrechter und schiefer Richtung bei 5 Sek. Expositionszeit nicht zu bemerken.

Dieselben Versuche wurden nun bei härteren Strahlen wiederholt, so ergab sich:

a) Röhrenstellung horizontal. Exposition: 5 Sek.

Intensität der emittierten Sekundärstrahlen

Scheiben- stellung	senkrecht gegen die X-Achse	schief gegen die X-Achse	Härte- änderung
1. Messung	5,5	5,9	0,0 Skt.
2. "	6,0	5,9	0,0 "
3. "	6,0	6,0	+0,1 "
4. "	6,0	6,0	+0,0 "

b) Röhrenstellung vertikal. Exposition: 5 Sek.

Intensität der emittierten Sekundärstrahlen

Scheiben- stellung	senkrecht gegen die X-Achse	schief gegen die X-Achse	Härte- änderung
1. Messung	6,0	6,8	0,0 Skt.
2. "	7,0	6,8	+0,3 "
3. "	7,0	7,0	-0,2 "
4. "	7,0	7,1	+0,5 "

Auch bei harten Strahlen ist eine Intensitätsverschiedenheit bei 5 Sek. Exposition nicht zu bemerken.

Resultat: Innerhalb einer durch die X -Achse gelegten Ebene läßt sich bei einer Expositionszeit von 5 Sek. keine Spur einer Intensitätsverschiedenheit zwischen den senkrecht gegen die X -Achse emittierten Sekundärstrahlen und den unter einem Winkel von 72° schief gegen die X -Achse emittierten Sekundärstrahlen nachweisen.

Dies Resultat schließt jedoch nicht aus, daß doch eine kleine Verschiedenheit der Intensität besteht, die erst bei längerer Exposition bemerkbar würde; eine längere Expositionszeit aber macht wegen der großen Härteänderung und der damit verbundenen sehr beträchtlichen Änderung der Sekundärstrahlungsintensität jede Messung illusorisch. Dazu kommt noch der Umstand, daß der Radiator zwischen je zwei Versuchen in eine andere Stellung gebracht werden muß, wobei er immer vollkommen zentrisch bestrahlt sein soll.

25. Die Polarisation der X -Strahlen bei schief gegen die X -Achse emittierten Sekundärstrahlen. Nun wurde untersucht, ob die schief gegen die X -Achse emittierten Sekundärstrahlen die Polarisation der primären X -Strahlen anzeigen.

Methode II, die nur bei kurzen Expositionszeiten gute Resultate liefert, ergab für den Radiator in Stellung II folgendes Resultat bei mittelweichen Strahlen und 5 Sek. Exposition:

Röhrenstellung:	90°	90°	0°	0°	90°	90°	0°	0°	90°	0°
Skalenteile:	3,5	3,5	2,7	3,0	4,0	4,0	3,0	3,0	4,7	3,8

$$\left. \begin{array}{l} S = 3,5 \text{ Skt.} \\ A = 0,4 \end{array} \right\} \text{in 5 Sek.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 11 \text{ Proz. Polarisation.}$$

Diese Methode wurde auch auf Radiatorstellung I und III angewandt, jedoch ohne Erfolg, da die für S und A erhaltenen Werte zu gering waren, um irgendwelche sichere Schlüsse daraus ziehen zu können. Länger zu exponieren war auch nicht möglich aus dem am Schluß des vorhergehenden Paragraphen bemerkten Grunde.

Dagegen war die Polarisation bei allen drei Radiatorstellungen nach Methode I, bei der der Ein-

fluß der Änderung von δ eliminiert ist, nachweisbar. Exponiert wurde 2 Min. bei mittelweichen Strahlen.

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°
Radiatiorstellung I:	-10,0	+ 9,5	-10,0	+ 9,7 Skt.
" II:	-16,0	+ 17,0	-19,0	+ 18,0 "
" III:	-12,0	+ 13,0	-14,0	+ 18,0 "

Die im vorhergehenden Paragraphen besprochenen zwei Korrekturen — wegen der Änderung der Antikathodenentfernung und der Weglänge der Sekundärstrahlen — müssen auch hier angebracht werden. Man erhält dann folgende Werte:

Röhrenstellung	0°	90°	180°	270°
senkrechte Sekundärstrahlen	-16,0	+ 17,0	-19,0	+ 18,0 Skt.
schief Sekundärstrahlen .	-12,0	+ 12,2	-13,0	+ 12,3 "

Demnach ist für die senkrecht emittierten Sekundärstrahlen Δ (im Mittel) = 8,7 Skt., während für die schief emittierten Sekundärstrahlen Δ' (im Mittel) = 6,2 Skt ist. Somit ist $\Delta' < \Delta$.

Die Polarisation nimmt also bei schief emittierten Strahlen ab. Der Winkel zwischen der Achse des untersuchten Sekundärstrahlenbündels und der X-Achse betrug bei

Radiatiorstellung I	72°
" II	90°
" III	108°

Resultat: Sekundärstrahlen, die senkrecht gegen die Achse der Primärstrahlen ausgehen, zeigen am meisten Polarisation.

26. Einfluß der Medien, die die Primärstrahlung absorbieren, auf die Polarisation. Der Versuch des vorigen Paragraphen mit der absorbierenden Glasplatte hatte keinen Einfluß derselben auf die Polarisation ergeben. Nun wurde untersucht, ob auch solche Medien, die sich bezüglich der Polarisation der X-Strahlen so charakteristisch verhalten, wie Blei und Paraffin, keinen Einfluß auf die Polarisation ausübten, wenn sie in den Gang der Primärstrahlen gebracht wurden. Derartige Versuche wurden zunächst gemacht mit Pb,

mit Wasser, Petroleum und 5 proz. Bleinitratlösung in einem Aluminiumgefäß, und mit Paraffin. Als Radiator diente hierbei stets die Paraffinkugel. Ausgeführt wurden die Messungen nach Methode III. Speziell bei dem Versuch mit dem absorbierenden Pb wurde an eine möglicherweise auftretende Depolarisation gedacht. Jedoch wurde in allen Fällen Polarisation erhalten. Einige dieser Versuche ergaben sogar das merkwürdige Resultat, daß sich durch die Absorption der Primärstrahlen — falls sie nicht zu gering war — in dem in den Strahlengang eingeschalteten Medium die Intensität S der Sekundärstrahlen in stärkerem Maße verminderte als die Polarisation A , so daß daraus eine Zunahme der Polarisation in Prozenten resultierte. Es galt nun, dieses unerwartete Resultat so genau wie nur möglich auf seine Richtigkeit zu prüfen. Bei diesen Messungen zeigte sich aber eine große Schwierigkeit, die nicht zu umgehen war und in folgendem bestand:

Die beobachtete Zunahme der Polarisation war nur dann deutlich zu erhalten, wenn die Absorption, die die Primärstrahlen erlitten, eine sehr beträchtliche war. Dann aber wurden die am Elektrometer abgelesenen Werte für S und $2A$ außerordentlich klein. Andererseits mußte so kurz wie nur möglich exponiert werden, um Härteänderungen der Röhre möglichst zu verhindern, da ein ganz minimales Härterwerden der Primärstrahlung den Wert von S , d. h. die Intensität der Sekundärstrahlung beträchtlich vergrößerte, so daß sich dann ein ganz anderes Verhältnis von A/S berechnete. Der Versuch, mit größerer Elektrometerempfindlichkeit zu arbeiten, hatte keinen Erfolg, da das Instrument in gleicher Weise auch empfindlicher gegen Härteänderung der Röhre und der dadurch bewirkten Intensitätsänderung der Sekundärstrahlen wurde. Daher enthalten die im folgenden angegebenen Versuche, aus denen eine Zunahme der Polarisation zu ersehen ist, sehr kleine Werte für S und $2A$. — Bei keinem anderen Versuch vorliegender Arbeit war es in dem Maße nötig, immer wieder durch Zwischenversuche die richtige Härte der Röhre, die ganz genau nur aus der Intensität der Sekundärstrahlung (bei gleichen Bedingungen) zu beurteilen war, durch minimales Regenerieren oder eventuell durch Erkaltenlassen der Röhre herzustellen. — Aus diesen Gründen sind die Messungen dieses Paragraphen nicht so

zuverlässig wie die übrigen. Daß aber die Versuchsresultate, die eine Zunahme der Polarisation ergeben, doch Anspruch auf einige Sicherheit haben, beweisen die stets vor und nach jedem Absorptionsversuch gemachten Versuche ohne absorbiendes Medium, die immer bei mehreren Röhrenstellungen gemacht wurden und stets denselben Wert für A/S ergaben. Auch ist unter allen Absorptionsversuchen nicht einer, der eine Abnahme der Polarisation gezeigt hätte. Folgende Versuchsresultate wurden erhalten:

Absorbierendes Medium	S in Skt.	Exposit.-Zeit in Sek.	$2A$ in Skt.	Exposit.-Zeit in Sek.	Polarisation in Proz.
Luft (4) ¹⁾	23,5	30	9,8	60	10
Pt-Folie I ²⁾ (4)	2,0	30	1,6	60	20
Luft (1)	23,0	30	10,0	60	10

Dann wurde die Empfindlichkeit des Elektrometers aufs doppelte erhöht.

Luft (4)	23,0	15	10,0	30	10
Pt-Folie I (5)	2,1	30	2,0	60	22
Luft (1) ³⁾	23,0	15	10,0	30	10
Wasser (5) ³⁾	4	30	8,4	60	21
Luft (1)	22,0	15	10,2	30	11

Darauf wurden die Versuche mit einer neueren Röhre gemacht; es ist dies dieselbe, die späterhin als Röhre III bezeichnet ist. Diese Röhre III ergab unter denselben Bedingungen, unter denen die bisher benutzte Röhre I 10 Proz. Polarisation mittels des Paraffins gab, nur 6 Proz. Über diesen Punkt vgl. § 29, wo von der Polarisation verschiedener X-Strahlenröhren die Rede ist. Die neuere Röhre III, die

1) Die in Klammern beigelegte Zahl bedeutet die Anzahl der unmittelbar aufeinanderfolgenden Versuche in den verschiedenen Röhrenstellungen.

2) Dicke 0,02 mm.

3) In einem parallelepipedischen Al-Gefäß, dessen Wand 0,2 mm stark war. Auch die anderen Flüssigkeiten wurden in diesem Gefäß untersucht. Die Dicke der durchstrahlten Flüssigkeitschicht betrug 2 cm.

ihre Härte weniger rasch ändern sollte, ergab folgende Versuchsresultate bei normaler Elektrometerempfindlichkeit.

Absorbierendes Medium	<i>S</i> in Skt.	Exposit.-Zeit in Sek.	2 <i>A</i> in Skt.	Exposit.-Zeit in Sek.	Polarisat. ion in Proz.
Luft (5)	43,5	15	9,9	30	6
1 Stanniolblatt ¹⁾ (5)	33,0	15	8,3	30	6
Luft (3)	44,5	15	9,8	30	6
2 Stanniolblatt (5)	25,3	15	6,6	30	6
Luft (3)	44,5	15	9,5	30	6
4 Stanniolblatt (5)	21,8	15	5,6	30	6
Luft (3)	43,0	15	9,5	30	6
8 Stanniolblatt (5)	12,5	15	3,5	30	7
Luft (3)	43,5	15	9,2	30	6
16 Stanniolblatt (5)	6,7	15	2,0	30	7
Luft (3)	45,0	15	10,0	30	6
1 Cu-Blech I ²⁾ (5)	22,0	15	8,5	30	7
Luft (3)	45,5	15	10,1	30	6
2 Cu-Bleche I (5)	13,5	15	5,0	30	9
Luft (3)	44,5	15	10,5	30	6
1 Cu-Blech II ³⁾ (5)	2,5	15	2,2	60	10
Luft (3)	45,0	15	10,0	30	6
1 Messingblech ⁴⁾ (4)	2,9	30	2,1	60	7
Luft (1)	42,0	15	10,5	30	6
Wasser (5)	8,7	15	4,2	30	12
Luft (3)	42,0	15	9,8	30	6
Petroleum (5)	14,0	15	4,7	30	9
Luft (3)	43,0	15	9,5	30	6
Nitrobenzol (5)	13,0	15	4,3	30	8
Luft (3)	43,0	15	9,0	30	6
Benzol (5)	15,3	15	4,8	30	8
Luft (1)	42,0	15	9,5	30	6
Schwefelkohlenstoff	2,0	30	—	—	—
Luft (2)	42,5	15	9,3	30	6
75 Teile Benzol u. 25 Teile Schwefel- kohlenstoff (5)	4,3	15	2,1	30	12
Luft (3)	43,0	15	9,7	30	6

1) Dicke 0,005 mm.

2) Dicke 0,05 mm.

3) Dicke 0,25 mm.

Absorbierendes Medium	<i>s</i> in Skt.	Exposit-Zeit in Sek.	2 <i>A</i> in Skt.	Exposit-Zeit in Sek.	Polarisation in Proz.
70 Teile Benzol u. 30 Teile Schwefelkohlenstoff (5)	4,3	15	2,0	30	12
Luft (3)	43,0	15	9,8	30	6
Pt-Folie II ¹⁾ (5)	35,0	15	8,7	30	6
Luft (3)	43,0	15	10,0	30	6
Pt-Folie I (5)	9,4	15	4,0	30	10
Luft (1)	42,0	15	10,2	30	6
Pt-Folie III ²⁾ (2)	2,0	15	1,1?	30	14?
Luft (5)	43,0	15	10,0	30	6
3 Al-Bleche ³⁾ (5)	5,5	15	2,0	30	9
Luft (1)	42,0	15	10,0	30	6

Resultat: Aus diesen zahlreichen Versuchsresultaten ist doch wohl mit einiger Sicherheit eine *Zunahme* der Polarisation, veranlaßt durch das Einschalten beträchtlich absorbierender Medien in den Gang der Primärstrahlen, zu erkennen.

Mit absoluter Sicherheit läßt sich diese Frage nur dann entscheiden, wenn es gelingt, eine X-Strahlröhre zu verwenden, deren Härte sich nicht nur sehr wenig, sondern überhaupt nicht ändert, einerlei ob die Röhre in eine andere Lage gebracht wird oder länger beansprucht wird.

Im Anschluß an diese Versuche wurde schließlich auch noch der Einfluß der Luftsicht, die die Primärstrahlen zwischen Röhre und Radiator passieren mußten, untersucht. Zu diesem Zwecke wurde die Drehvorrichtung samt der axial eingestellten Röhre auf eine fast 3 m lange optische Bank gesetzt, und diese mittels Fußschrauben so eingestellt, daß die Drehvorrichtung auf den Stahlschienen der Bank, von einem geeigneten Schlitten geführt, beliebig verschoben werden konnte, wobei die Projektionen der oben beschriebenen Pb-Fadenkreuze auf dem Fluoreszenzschirm in Deckung bleiben

1) Dicke 0,003 mm.

2) Dicke 0,05 mm.

3) Dicke je 2 mm.

mußten. Da aber bei einer größeren Entfernung Antikathode-Radiator der Radiator infolge der bisher benutzten Disposition der Blenden nicht mehr in seiner ganzen Ausdehnung, sondern nur noch zentral von Primärstrahlen getroffen wurde, mußte speziell für diesen Versuch an den Blenden folgende Änderung vorgenommen werden: Die Blende D_2 wurde ganz entfernt, und statt der Blende D_1 wurde ein System von drei konzentrisch übereinander verschiebbaren Blenden mit den Durchmessern 3,2, 4,5 und 4,9 cm (berechnet nach dem doppelten bzw. dreifachen Abstand Antikathode-Radiator) eingesetzt. Diese Blendenvorrichtung wurde sorgfältigst in die Achse des Rohres N zentriert mittels vier Fadenkreuze, in ähnlicher Weise wie oben. Die Blende D blieb unverändert. Auf diese Weise war erreicht, daß bei jeder Verschiebung der Drehvorrichtung dem X-Strahlenbündel an der Stelle, wo es den Radiator traf, stets derselbe Querschnittsdurchmesser gegeben werden konnte. Der Versuch, der mit Röhre III ausgeführt wurde, ergab nun folgendes Resultat:

Absorbierende Luftschicht	S in Skt.	Exposit.- Zeit in Sek.	$2 A$ in Skt.	Exposit.- Zeit in Sek.	Polaris- sation in Proz.
73 cm (5)	48	15	9,5	30	6
146 „ (5)	11,5	15	2,4	30	6
73 „ (1)	48	15	9,5	30	6
219 „	5	15	zu gering		

Der Versuch wurde wiederholt mit demselben Resultat.

Da der Zustand der Röhre, wenn diese in der Nähe des Bleikastens ist, vielleicht ein etwas anderer sein könnte als in größerer Entfernung, wurde die Entfernung wiederholt kommutiert und jedesmal nur S gemessen, jedoch es ergaben sich stets die in obiger Tabelle angegebenen Werte für S .

Zugleich war bei diesem Versuche zu erkennen, daß die Intensität der vom Radiator ausgehenden Sekundärstrahlung indirekt proportional ist dem Quadrat der Entfernung der Antikathode vom Radiator.

Resultat: Die Absorption in Luft ergab keine Zunahme der Polarisation.¹⁾

27. Polarisation in verschiedenen Strahlungsebenen der Röhre I. Alle bisherigen Versuche wurden mit Primärstrahlen angestellt, die senkrecht zu den Kathodenstrahlen in der Einfallsebene emittiert wurden, wobei unter Einfallsebene die durch die Normale zur Antikathode und durch die Achse der Kathodenstrahlen gelegte Ebene verstanden wird. Unter Strahlungsebene sei jede Ebene durch die Achse der Kathodenstrahlen verstanden. Im folgenden sind X-Strahlen untersucht, die wie bisher senkrecht zu den Kathodenstrahlen aber in Strahlungsebenen verlaufen, die den Winkel ω mit der Einfallsebene bilden. Für Δ ergab sich hierbei folgendes²⁾:

Methode I. Mittelweiche Strahlen. Exposition: 2 Min.

Röhrenstellung	Winkel zwischen Einfalls- und Strahlungsebene						
	$\omega = 0^\circ$	$\omega = 10^\circ$	$\omega = 20^\circ$	$\omega = 30^\circ$	$\omega = 40^\circ$	$\omega = 50^\circ$	$\omega = 60^\circ$
0°	-25,0	-26,0	-25,0	-26,5	-26,0	-24,0	-27,0
90°	+25,5	+27,0	+25,0	+27,0	+27,0	+24,5	+24,0
180°	-25,0	-26,5	-26,5	-27,0	-28,0	-25,0	-26,5
270°	+26,5	+28,0	+27,5	+28,0	+28,5	+28,0	+28,0

Hier nach ist die Polarisation vom Winkel ω zwischen Einfallsebene und Strahlungsebene unabhängig.

Eine genauere Messung wurde dann noch für die beiden Werte $\omega = 60^\circ$ und $\omega = -60^\circ$ ausgeführt. Sämtliche Versuche wurden bei mittelweichen Strahlen gemacht, nach Methode III.

a) $\omega = 0^\circ$. Methode III. Mittelweiche Strahlen.

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°	[360°] ³⁾	Exposit.:
Sekundärstrahlung:	48,0	47,0	44,0	52,0	46,5 Skt.	$\frac{1}{2}$ Min.
Polarisation:	-33,0	+34,0	-34,0	+36,0	-35,5	" 2 "

$$\left. \begin{array}{l} S = 47,8 \text{ Skt.} \\ \Delta = 4,3 \text{ " } \end{array} \right\} \text{in } \frac{1}{2} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{\Delta}{S} = 9 \text{ Proz. Polarisation.}$$

1) Die nun folgenden Versuche sind wieder mit der normalen Versuchsanordnung (Blenden, Abstand der Röhre) angestellt. Alle Messungen sind, wenn keine andere Angabe beigefügt ist, mit Röhre I ausgeführt.

2) Bei dieser und allen folgenden Messungen diente als Radiator die Paraffinkugel.

3) Die Werte für diese Stellung sind bei Berechnung von S nicht berücksichtigt, da nur bei einer geraden Anzahl von Beobachtungen die Größe Δ eliminiert wird, vgl. § 10.

Methode II hatte für $w = 0$ bei mittelweichen Strahlen $x = 11$ Proz. Polarisation ergeben.

b) $\omega = +60^\circ$. Methode III. Mittelweiche Strahlen.

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°	[360°]	Exposit.:
Sekundärstrahlung:	39,0	47,0	46,5	46,0	47,0 Skt.	$\frac{1}{2}$ Min.
Polarisation:	-32,0	+33,0	-33,0	+33,0	-32,0	" 2 "
$S = 44,6$ Skt.	$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$	in $\frac{1}{2}$ Min.	$x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 9$ Proz. Polarisation.			
$A = 4,1$ "						

c) $\omega = -60^\circ$. Methode III. Mittelweiche Strahlen.

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°	[360°]	Exposit.:
Sekundärstrahlung:	45,0	49,5	45,0	47,0	45,0 Skt.	$\frac{1}{2}$ Min.
Polarisation:	-31,0	+35,0	-34,0	+30,5	-33,0	" 2 "
$S = 46,5$ Skt.	$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$	in $\frac{1}{2}$ Min.	$x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 9$ Proz. Polarisation.			
$A = 4,1$ "						

d) $\omega = 0^\circ$. Methode III. Mittelweiche Strahlen.

Der Versuch wurde nur bei der Röhrenstellung 0° gemacht und ergab $S = 49,0$ Skt. in $\frac{1}{2}$ Min. und $2A = -31,1$ Skt. in 2 Min.

Resultat: Die Polarisation hängt vom Winkel zwischen Strahlungs- und Einfallsebene nicht ab.

28. Polarisation bei verschiedenen Azimuten der Röhre I. Die Bezeichnung „Azimut“ sei auf den Winkel angewandt, den die Achse der Kathodenstrahlen mit der Achse des untersuchten primären X-Strahlenkegels bildet. Dieser Winkel war bislang stets 90° . Nun wird die Polarisation bei verschiedenem Azimut gemessen werden.¹⁾ Die folgenden Messungen beziehen sich nur auf die bisher benutzte X-Strahlerröhre I.

Methode III. Mittelweiche Strahlen.

a) Azimut 90° .

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°	[360°]	Exposit.:
Sekundärstrahlung:	45,0	42,5	48,0	46,0	48,0 Skt.	$\frac{1}{2}$ Min.
Polarisation:	-36,0	+36,0	-32,0	+35,5	-35,0	" 2 "
$S = 45,4$ Skt.	$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$	in $\frac{1}{2}$ Min.	$x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 10$ Proz. Polarisation.			
$A = 4,4$ "						

1) Für diese Versuche mußte für jedes Azimut ein besonderer Halter auf die Achse der Drehvorrichtung aufgeschraubt werden, der eine Drehung der Röhre um die X-Achse bei dem zu prüfenden Azimut ermöglichte. Es wurden deshalb nur wenige Azimute untersucht.

b) Azimut 45° .

Röhrenstellung: 0° 90° 180° 270° [360°] Exposit.:

Sekundärstrahlung: 27,0 28,0 22,0 26,5 29,0 Skt. $\frac{1}{2}$ Min.

Polarisation: -7,5 +6,7 -6,8 +7,0 -7,0 „ 2 „

$$\begin{aligned} S &= 25,8 \text{ Skt.} \\ A &= 0,9 \quad „ \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{in } \frac{1}{2} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 3 \text{ Proz. Polarisation.}$$

c) Azimut 30° .

Röhrenstellung: 0° 90° 180° 270° [360°] Exposit.:

Sekundärstrahlung: 29,0 25,5 26,0 25,0 25,5 Skt. $\frac{1}{2}$ Min.

Polarisation: -2,8 +3,2 -3,5 +3,5 -3,5 „ 2 „

$$\begin{aligned} S &= 26,4 \text{ Skt.} \\ A &= 0,4 \quad „ \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{in } \frac{1}{2} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 1,5 \text{ Proz. Polarisation.}$$

d) Azimut 120° .

Röhrenstellung: 0° 90° 180° 270° [360°] Exposit.:

Sekundärstrahlung: 37,0 38,0 39,5 36,0 37,5 Skt. $\frac{1}{2}$ Min.

Polarisation: -30,0 +29,0 -30,5 +28,5 -30,5 „ 2 „

$$\begin{aligned} S &= 37,6 \text{ Skt.} \\ A &= 3,8 \quad „ \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{in } \frac{1}{2} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 10 \text{ Proz. Polarisation.}$$

Dies Resultat wurde wiederholt für Azimut 120° erhalten
(bei mittelweichen Strahlen).

Röhrenstellung: 0° 90° 180° 270° [360°] Exposit.:

Sekundärstrahlung: 37,5 39,5 36,5 38,0 37,5 Skt. $\frac{1}{2}$ Min.

Polarisation: -30,5 +30,5 -29,0 +29,5 -30,5 „ 2 „

$$\begin{aligned} S &= 37,9 \text{ Skt.} \\ A &= 3,7 \quad „ \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{in } \frac{1}{2} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 10 \text{ Proz. Polarisation.}$$

Außerdem¹⁾ liegt noch eine Messung vor für ein Azimut von 60° .

Röhrenstellung: 0° 90° 0° 90° Exposit.:

Sekundärstrahlung: 6,1 6,6 5,6 6,0 Skt. 5 Sek.

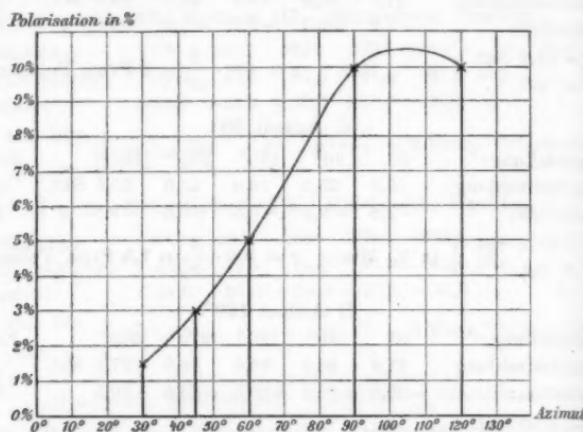
Polarisation: -14,5 +18,5 -15,0 +14,0 „ 2 Min.

$$\begin{aligned} S &= 6,1 \text{ Skt.} \\ A &= 0,3 \quad „ \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{in 5 Sek.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 5 \text{ Proz. Polarisation.}$$

Resultat: Innerhalb der Azimute von 30 — 90° nimmt bei Röhre I die Polarisation mit dem Azimut zu und

1) Azimute $> 120^\circ$ zu untersuchen ist nicht möglich wegen der Lage der Antikathodenebene, ebensowenig Azimute $< 30^\circ$.

dürfte ihr Maximum vermutlich zwischen 100° und 110° erreichen (graphische Darstellung 2).



Graph. Darstellung 2. Polarisation bei verschiedenen Azimut der Röhre I.

29. Polarisation bei verschiedenen X-Strahlröhren. Alle bisher angegebenen Messungen wurden — mit Ausnahme der Absorptionsversuche — mit der Röhre I gemacht. Nun wurde eine neue Röhre, die als Röhre II bezeichnet werden soll, bezüglich der Polarisation untersucht. Der Versuch ergab folgendes:

Röhre II. Mittelweiche Strahlen. Azimut 90° . Methode III.

Radiatör: Paraffinkugel.

Röhrenstellung: $0^\circ \quad 90^\circ \quad 180^\circ \quad 270^\circ \quad [360^\circ]$ Exposit.:

Sekundärstrahlung: $36,0 \quad 34,0 \quad 38,5 \quad 40,0 \quad 43,0$ Skt. $\frac{1}{4}$ Min.

Polarisation: $-27,0 \quad +26,0 \quad -28,0 \quad +27,0 \quad -27,5$ „ $\frac{1}{2}$ „

$$\begin{aligned} S &= 37,1 \cdot \text{Skt.} \\ A &= 1,7 \quad \text{„} \end{aligned} \quad \left\{ \text{in } \frac{1}{4} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 5 \text{ Proz. Polarisation.} \right.$$

Röhre I. Mittelweiche Strahlen. Azimut 90° . Methode III.

Radiatör: Paraffinkugel.

Röhrenstellung: $0^\circ \quad 90^\circ \quad 180^\circ \quad 270^\circ \quad [360^\circ]$ Exposit.:

Sekundärstrahlung: $46,0 \quad 45,0 \quad 47,5 \quad 47,0 \quad 45,5$ Skt. $\frac{1}{2}$ Min.

Polarisation: $-35,0 \quad +35,0 \quad -37,0 \quad +36,0 \quad -36,0$ „ $\frac{1}{2}$ „

$$\begin{aligned} S &= 46,4 \text{ Skt.} \\ A &= 4,5 \quad \text{„} \end{aligned} \quad \left\{ \text{in } \frac{1}{2} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 10 \text{ Proz. Polarisation.} \right.$$

Röhre II. Mittelweiche Strahlen. Azimut 90°. Methode III.

Radiator: Paraffinkugel.

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°	Exposit.:
Sekundärstrahlung:	35,0	33,0	36,0	38,0	Skt. 1/4 Min.
Polarisation:	-28,0	+26,0	-29,5	+28,0	„ 2 „

$$\begin{aligned} S &= 35,5 \text{ Skt.} \\ A &= 1,7 \text{ } „ \end{aligned} \quad \left\{ \text{in } \frac{1}{4} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 5 \text{ Proz. Polarisation.} \right.$$

Wie man sieht, ist die Sekundärstrahlung bei den beiden Röhren sehr verschieden; dies führt nur zum geringsten Teil von der verschiedenen Härte der beiden Röhren her, denn den beiden Röhren parallel geschaltete Funkenstrecken waren nur um 1 cm verschieden, wodurch bei gleicher Röhre keineswegs die Polarisation in Prozenten um die Hälfte ihres Wertes geändert wird. Das Bild der Hand auf dem Fluoreszenzschirm war ebenfalls bei beiden Röhren gleich kontrastreich.

Dann wurde noch eine andere, ebenfalls fast neue Röhre — Röhre III — untersucht.

Röhre III. Mittelweiche Strahlen. Azimut 90°. Methode III.

Radiator: Paraffinkugel.

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°	[360°]	Exposit.:
Sekundärstrahlung:	24,5	27,0	24,5	28,0	26,0 Skt.	1/4 Min.
Polarisation:	-6,5	+6,0	-7,0	+5,5	-6,5 „	1/2 „

$$\begin{aligned} S &= 26,0 \text{ Skt.} \\ A &= 1,6 \text{ } „ \end{aligned} \quad \left\{ \text{in } \frac{1}{4} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 6 \text{ Proz. Polarisation.} \right.$$

Eine Wiederholung dieses Versuches ergab:

Röhre III. Mittelweiche Strahlen. Azimut 90°. Methode III.

Radiator: Paraffinkugel.

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°	[360°]	Exposit.:
Sekundärstrahlung:	26,0	28,0	24,0	29,0	28,0 Skt.	1/4 Min.
Polarisation:	-6,0	+6,3	-6,0	+6,5	-6,0 „	1/2 „

$$\begin{aligned} S &= 26,8 \text{ Skt.} \\ A &= 1,6 \text{ } „ \end{aligned} \quad \left\{ \text{in } \frac{1}{4} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 6 \text{ Proz. Polarisation.} \right.$$

Härte und parallele Funkenstrecke waren dieselben wie bei Röhre I. Somit gilt das Resultat: Die Polarisation ist für verschiedene, dem gleichen Typus angehörende Röhren von gleicher Härte quantitativ verschieden, aber von derselben Größenordnung.

Dies mag wohl seinen Grund in der Anordnung der Teilchen der Antikathode haben. — X-Strahlenröhren von einem anderen Typus als den angegebenen kamen nicht zur Untersuchung.

Die primäre Induktorstromstärke war wie bei allen Versuchen, bei denen nichts anderes bemerkt ist, stets 3 Amp.

30. Polarisation bei verschiedenem Azimut der Röhre II. Die mit mittelweichen Strahlen gemachten Messungen ergaben folgendes:

a) Azimut 90° .

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°	[360°]	Exposit.:
Sekundärstrahlung:	30,0	30,5	35,0	34,5	33,5 Skt.	$\frac{1}{4}$ Min.
Polarisation:	-25,5	+22,0	-26,0	+24,5	-22,0	" 2 "

$$\left. \begin{array}{l} S = 32,5 \text{ Skt.} \\ A = 1,5 \text{ " } \end{array} \right\} \text{in } \frac{1}{4} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 5 \text{ Proz. Polarisation.}$$

b) Azimut 30° .

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°	[360°]	Exposit.:
Sekundärstrahlung:	18,5	21,0	25,8	28,0	26,0 Skt.	$\frac{1}{4}$ Min.
Polarisation:	-0,5	+0,4	-0,8	+0,8	-0,6	" 2 "

$$\left. \begin{array}{l} S = 22,8 \text{ Skt.} \\ A = 0,14 \text{ " } \end{array} \right\} \text{in } \frac{1}{4} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 0,2 \text{ Proz. Polarisation.}$$

c) Azimut 60° .

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°	[360°]	Exposit.:
Sekundärstrahlung:	32,5	42,0	36,0	36,5	38,0 Skt.	$\frac{1}{4}$ Min.
Polarisation:	-10,5	+10,5	-11,0	+10,0	-10,5	" 2 "

$$\left. \begin{array}{l} S = 36,8 \text{ Skt.} \\ A = 0,7 \text{ " } \end{array} \right\} \text{in } \frac{1}{4} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 2 \text{ Proz. Polarisation.}$$

d) Azimut 120° .

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°	[360°]	Exposit.:
Sekundärstrahlung:	37,0	37,0	39,0	38,0	34,0 Skt.	$\frac{1}{4}$ Min.
Polarisation:	-21,0	+18,0	-21,0	+20,0	-22,0	" 1 "

$$\left. \begin{array}{l} S = 37,8 \text{ Skt.} \\ A = 2,5 \text{ " } \end{array} \right\} \text{in } \frac{1}{4} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 7 \text{ Proz. Polarisation.}$$

Weitere Messungen bei Azimut 120° :

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°	[360°]	Exposit.:
Sekundärstrahlung:	34,0	40,0	33,0	38,5	37,0 Skt.	$\frac{1}{4}$ Min.
Polarisation:	-22,0	+21,5	-18,5	+19,5	-20,0	" 1 "

$$\left. \begin{array}{l} S = 36,4 \text{ Skt.} \\ A = 2,5 \text{ " } \end{array} \right\} \text{in } \frac{1}{4} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 7 \text{ Proz. Polarisation.}$$

e) Azimut 90° .

Röhrenstellung: $0^\circ \quad 90^\circ \quad 180^\circ \quad 270^\circ \quad [360^\circ]$ Exposit.:

Sekundärstrahlung: $43,0 \quad 37,0 \quad 32,5 \quad 38,0 \quad 40,5$ Skt. $\frac{1}{4}$ Min.

Polarisation: $-27,0 \quad +26,5 \quad -28,0 \quad +27,0 \quad -27,0$ „ „

$$\left. \begin{array}{l} S = 37,6 \text{ Skt.} \\ A = 1,7 \text{ „} \end{array} \right\} \text{in } \frac{1}{4} \text{ Min. } x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 5 \text{ Proz. Polarisation.}$$

Der Azimut 120° wurde wiederholt gemessen.

f) Azimut 90° .

Röhrenstellung: $0^\circ \quad 90^\circ \quad 180^\circ \quad 270^\circ$ Exposit.:

Sekundärstrahlung: $35,0 \quad 33,0 \quad 36,0 \quad 38,0$ Skt. $\frac{1}{4}$ Min.

Polarisation: $-28,0 \quad +26,0 \quad -28,5 \quad +28,0$ „ „

$$\left. \begin{array}{l} S = 35,5 \text{ Skt.} \\ A = 1,7 \text{ „} \end{array} \right\} \text{in } \frac{1}{4} \text{ Min. } x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 5 \text{ Proz. Polarisation.}$$

g) Azimut 120° .

Röhrenstellung: $0^\circ \quad 90^\circ \quad 180^\circ \quad 270^\circ \quad [360^\circ]$ Exposit.:

Sekundärstrahlung: $38,0 \quad 39,0 \quad 38,0 \quad 38,5 \quad 38,5$ Skt. $\frac{1}{4}$ Min.

Polarisation: $-22,0 \quad +18,0 \quad -21,0 \quad +18,0 \quad -19,5$ „ „

$$\left. \begin{array}{l} S = 38,4 \text{ Skt.} \\ A = 2,5 \text{ „} \end{array} \right\} \text{in } \frac{1}{4} \text{ Min. } x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 7 \text{ Proz. Polarisation.}$$

h) Azimut 90° .

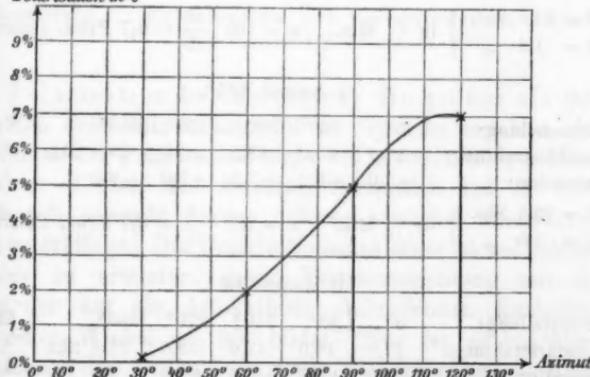
Röhrenstellung: $0^\circ \quad 90^\circ \quad 180^\circ \quad 270^\circ$ Exposit.:

Sekundärstrahlung: $36,0 \quad 37,0 \quad 39,0 \quad 36,0$ Skt. $\frac{1}{4}$ Min.

Polarisation: $-16,5 \quad +15,5 \quad -16,0 \quad -15,0$ „ „

$$\left. \begin{array}{l} S = 37,0 \text{ Skt.} \\ A = 2,0 \text{ „} \end{array} \right\} \text{in } \frac{1}{4} \text{ Min. } x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 5 \text{ Proz. Polarisation.}$$

Polarisation in %



Graph. Darstellung 3. Polarisation bei verschiedenem Azimut der Röhre II.

Ein anderes Resultat war bei dieser Röhre nicht zu erhalten.

Resultat: Bei Röhre II nimmt die Polarisation innerhalb der Azimute von 30° – 120° mit dem Azimut zu. Ob sie ihr Maximum bei kleinerem oder größerem Azimut als 120° erreicht, bleibt fraglich (graphische Darstellung 3).

Möglicherweise ist bei dieser Röhre die Anordnung der Teilchen der Antikathode etwas anders als bei Röhre I. Auch ist wohl der Einfluß der Glaswand der Röhre nach § 26 zu berücksichtigen.

31. Polarisation bei verschiedenem Azimut der Röhre III. Die Messungen ergaben:

a) Azimut 90° .

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°	[360°]	Exposit:
Sekundärstrahlung:	22,0	25,0	23,4	26,0	25,0 Skt.	$\frac{1}{4}$ Min.
Polarisation:	-5,8	+6,5	-6,4	+6,8	-6,0 „	$\frac{1}{2}$ „

$$\left. \begin{array}{l} S = 24,1 \text{ Skt.} \\ A = 1,6 \text{ „} \end{array} \right\} \text{in } \frac{1}{4} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 6,6 \text{ Proz. Polarisation.}$$

b) Azimut 120° .

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°	[360°]	Exposit:
Sekundärstrahlung:	19,0	21,0	20,0	23,0	22,5 Skt.	$\frac{1}{4}$ Min.
Polarisation:	-5,8	+5,2	-5,0	+5,5	+7,0 „	$\frac{1}{2}$ „

$$\left. \begin{array}{l} S = 21,0 \text{ Skt.} \\ A = 1,4 \text{ „} \end{array} \right\} \text{in } \frac{1}{4} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 6,7 \text{ Proz. Polarisation.}$$

c) Azimut 105° .

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°	[360°]	Exposit:
Sekundärstrahlung:	28,0	30,0	29,5	31,5	29,5 Skt.	$\frac{1}{4}$ Min.
Polarisation:	-7,0	+8,0	-7,5	+9,0	-8,0 „	$\frac{1}{2}$ „

$$\left. \begin{array}{l} S = 29,8 \text{ Skt.} \\ A = 2,0 \text{ „} \end{array} \right\} \text{in } \frac{1}{4} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 6,7 \text{ Proz. Polarisation.}$$

d) Azimut 60° .

Röhrenstellung:	0°	90°	180°	270°	[360°]	Exposit:
Sekundärstrahlung:	17,0	18,0	17,0	19,0	17,5 Skt.	$\frac{1}{4}$ Min.
Polarisation:	-2,8	+2,5	-3,0	+2,8	-3,3 „	$\frac{1}{2}$ „

$$\left. \begin{array}{l} S = 17,8 \text{ Skt.} \\ A = 0,7 \text{ „} \end{array} \right\} \text{in } \frac{1}{4} \text{ Min.} \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 4 \text{ Proz. Polarisation.}$$

e) Azimut 90° .

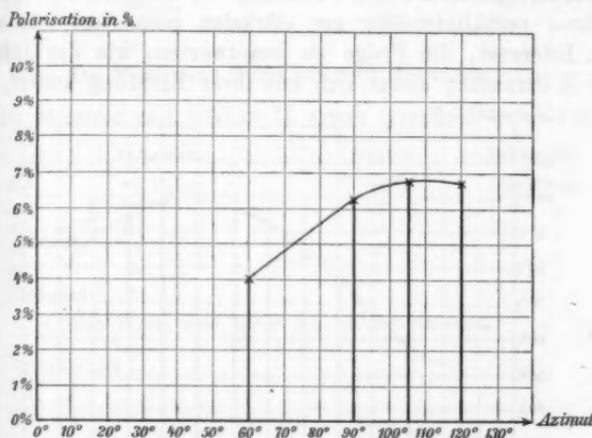
Röhrenstellung: 0° 90° 180° 270° [360°] Exposit.:

Sekundärstrahlung: 25,0 27,0 26,0 27,0 24,0 Skt. $\frac{1}{4}$ Min.

Polarisation: -6,5 +6,0 -6,5 +6,0 -6,0 " $\frac{1}{2}$ "

$$\begin{aligned} S &= 27,8 \text{ Skt. } \\ A &= 1,6 \text{ " } \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{ in } \frac{1}{4} \text{ Min. } \quad x = 100 \cdot \frac{A}{S} = 6 \text{ Proz. Polarisation.}$$

Resultat: Innerhalb der Azimute von 60° — 90° nimmt bei Röhre III die Polarisation mit dem Azimut zu und erreicht ein Maximum bei ca. 110° (graph. Darstellung 4).

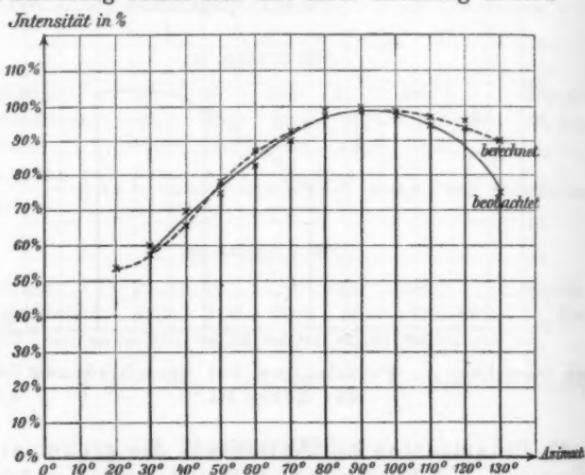


Graph. Darstellung 4. Polarisation bei verschiedenem Azimut der Röhre III.

32. Polarisation bei Azimuten, die größer als 90° sind. Die mit den drei Röhren angestellten Versuche ergaben, daß das Maximum der Polarisation nicht bei Azimut 90° , sondern bei höheren Werten des Azimuts, vermutlich bei ca. 110° liegt. Es soll versucht werden, dieses zunächst unerwartete Resultat zu erklären: Das Polarisationsmaximum ist bei solchen X-Strahlen zu erwarten, deren Emissionsrichtung mit der Richtung der auf die Antikathode auftreffenden Kathodenstrahlen einen Winkel von 90° bildet. Nun ist zu beachten, daß die Ebene der Antikathode gegen die ursprüngliche Richtung der Kathodenstrahlen unter 45° geneigt ist. Es ist wahrscheinlich, daß die Kathodenstrahlelektronen von

der Antikathode stark elektrostatisch angezogen und dadurch aus ihrer ursprünglichen Richtung unmittelbar vor dem Aufprallen auf die Antikathode abgelenkt werden, so daß sie steiler als unter 45° auf die Antikathode auftreffen. Dem entsprechend ist auch ein Maximum der Polarisation für größere Azimute als 90° zu erwarten.

33. Abhängigkeit der Strahlungsintensität vom Azimut. Nachdem wahrscheinlich gemacht war, daß die unter ca. 110° gegen das Kathodenstrahlbündel geneigt aus der Röhre austretende X-Strahlung bei den drei verschiedenen Röhren verhältnismäßig am stärksten polarisiert ist, war es von Interesse, die Frage zu beantworten, wie die Intensität der X-Strahlung selbst sich mit ihrer Richtung ändert.



Graph. Darstellung 5. Intensität bei verschiedenem Azimut der Röhre I.

Die vorhergehenden Versuche dazu zu benutzen, ging nicht an, weil die Werte wegen Änderung der Röhrenbeschaffenheit nicht untereinander vergleichbar waren; es wurden deshalb besondere Versuche¹⁾ gemacht, die diese Fehlerquelle

1) Zu diesen Versuchen wurde die Drehvorrichtung so gestellt, daß durch das Drehen der Röhre das Azimut verändert wurde, wozu eine Drehung der Röhre um 90° um ihre Längsachse nötig war; demnach wurde in der Einfallsalebene beobachtet.

möglichst eliminierten, und zwar speziell über die Änderung der Strahlungsintensität in der „Einfallsebene“ mit dem „Azimut“. Hierbei wird die Intensität der Sekundärstrahlung als proportional angenommen mit der Intensität der X-Strahlung.

Es wurde gefunden, wenn die Intensität beim Azimut 90° gleich 100 gesetzt wurde, für Röhre I (graph. Darst. 5):

Azimut	Intensität	Azimut	Intensität
30°	60 Proz.	90°	100 Proz.
40	70 "	100	97 "
50	75 "	110	94 "
60	82 "	120	95 "
70	90 "	180	74 "
80	99 "		

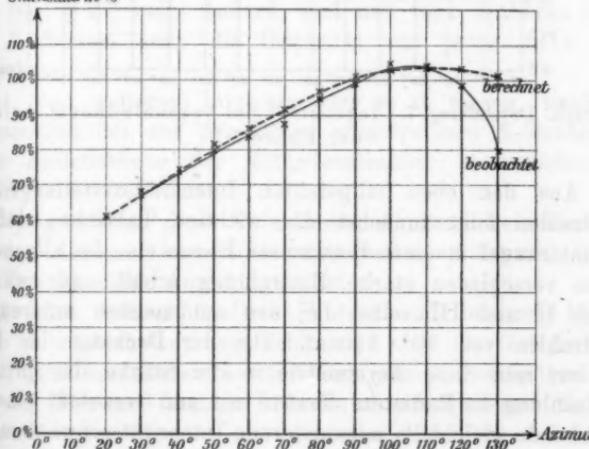
Die Werte sind Mittel aus zwei Messungen.

Die Messung mit Röhre II ergab (graph. Darstellung 6):

Azimut	Intensität	Azimut	Intensität
30°	67 Proz.	90°	100 Proz.
40	74 "	100	105 "
50	82 "	110	104 "
60	84 "	120	99 "
70	88 "	180	80 "
80	95 "		

Die Werte sind Mittel aus zwei Messungen.

Intensität in %

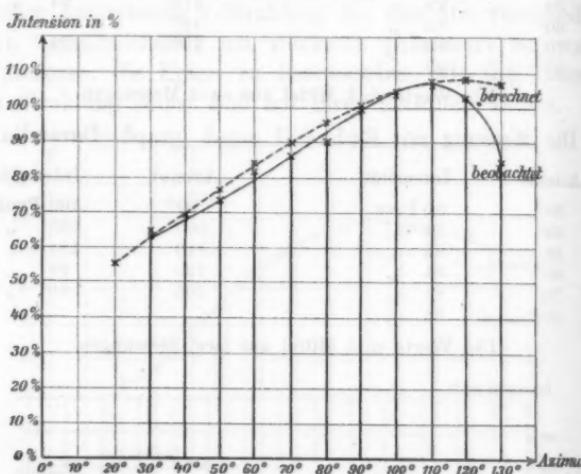


Graph. Darstellung 6. Intensität bei verschiedenenem Azimut der Röhre II.

Die Messung mit Röhre III ergab (graph. Darstellung 7):

Azimut	Intensität	Azimut	Intensität
30°	64 Proz.	90°	100 Proz.
40	69 "	100	104 "
50	73 "	110	106 "
60	81 "	120	102 "
70	85 "	130	84 "
80	90 "		

Die Werte sind Mittel aus zwei Messungen.



Graph. Darstellung 7. Intensität bei verschiedenem Azimut der Röhre III.

Aus den eben mitgeteilten Intensitätsverteilungen der X-Strahlen folgt zunächst die wichtige Tatsache, daß die Radiatorkugel in einer bestimmten Ebene eine im allgemeinen etwas verschiedenen starke Bestrahlung erhält und zwar bei Röhre II und III selbst bei den am meisten untersuchten X-Strahlen von 90° Azimut. Bei der Drehung der Röhre wandert nun diese Asymmetrie in der Stärke der primären Bestrahlung im Radiator offenbar mit und veranlaßt eine entsprechende gleichfalls mitwandernde Intensitätsschwankung der beiden Sekundärstrahlungen, also ein ganz ähnliches Phänomen, wie wir es als ein Zeichen vorhandener wahrer Polarisation

ausgesprochen haben. Abgesehen davon, daß diese Schwankung offenbar von unmerklicher Größe war, wie das Fehlen jeder Intensitätsverschiedenheit beim Versuch mit Blei beweist, und abgesehen davon, daß X-Strahlen der Röhre I gerade bei jenem Azimut (90°) die größte gemessene Polarisation zeigten, bei dem die primäre Strahlung eine merklich konstante Verteilung aufwies, bietet sich uns noch folgendes sehr beweiskräftige Kriterium dafür, daß eine wahre Polarisation nicht durch die in Rede stehende Fehlerquelle vorgetäuscht sein kann. Eine spezielle Betrachtung zeigt nämlich, daß eine am Differentialelektrometer gemessene Intensitätschwankung im Verlauf einer Röhrendrehung um 360° nur zweimal das Vorzeichen ändert, wenn sie durch asymmetrische Bestrahlung veranlaßt wird, während eine auf wahrer Polarisation beruhende Schwankung der Intensitäten viermal wechseln muß. Dieses letztere Verhalten wurde nun aber in unseren sämtlichen Versuchen ausnahmslos festgestellt.

Ein Vergleich dieser Resultate mit den obigen über Polarisation ergibt ferner, daß die intensivste Strahlung auch relativ am stärksten polarisiert ist. In Übereinstimmung damit ist auch das Resultat, daß die Polarisation der X-Strahlen sich bei konstantem Azimut mit der Richtung zur Einfalls ebene (vgl. § 27) nicht ändert, und daß nach früheren (vgl. § 27) Versuchen auch die Intensität von jener nicht abhängig ist.

34. Von weiterem Interesse wäre es zu wissen, weshalb die Intensität der aus der Röhre ausgetretenen X-Strahlung in der Einfallsebene der Kathodenstrahlen so verschieden ausfällt.

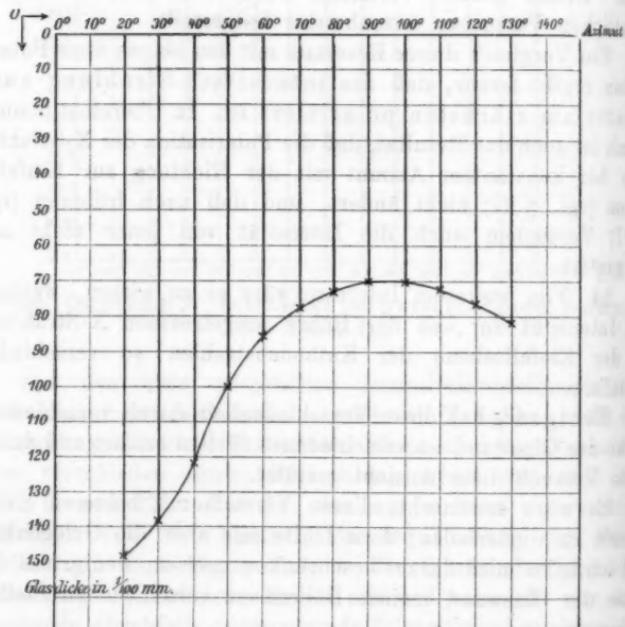
Röntgen¹⁾ hat diese Verschiedenheit durch verschiedene Dicke der Glaswand an verschiedenen Stellen erklärt und durch einen Versuch diese Ansicht gestützt.

Es wäre erwünscht, diesen Versuch mit besseren Hilfsmitteln zu wiederholen; dazu fehlte mir aber die Gelegenheit und ich habe mich darauf beschränken müssen, wenigstens die Dicke der Glaswand meiner Röhren an verschiedenen Stellen zu messen.

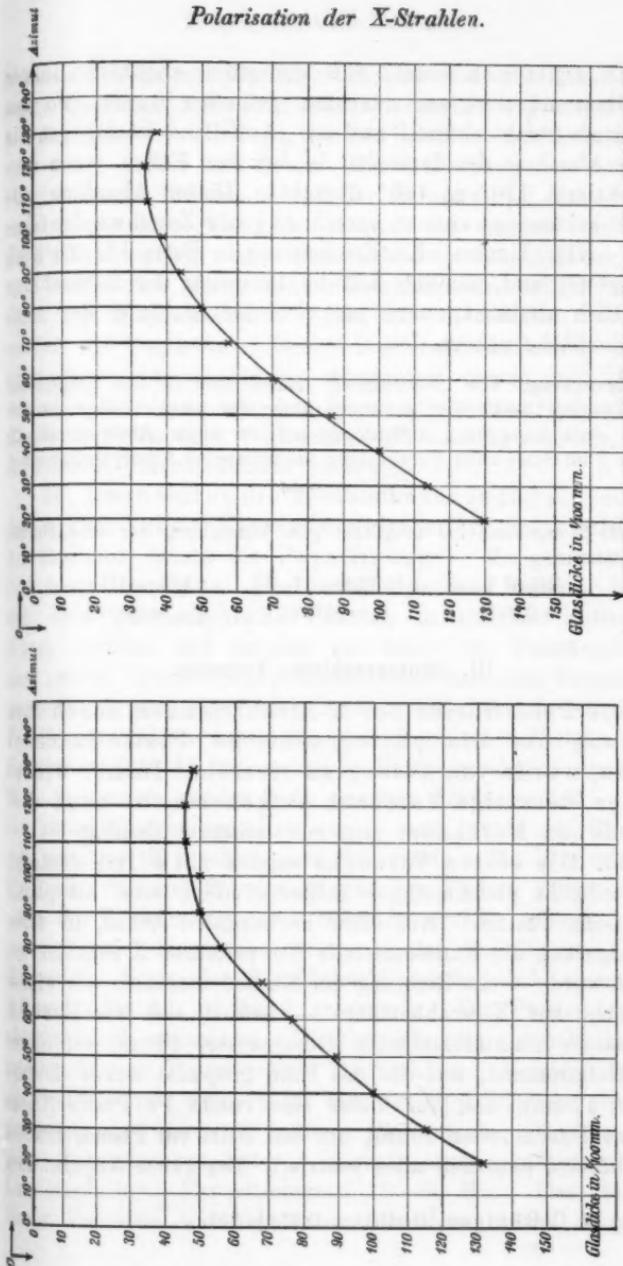
¹⁾ W. C. Röntgen, Berl. Ber. 1897. p. 395.

Ich fand darüber folgende Werte (graph. Darst. 8, 9 u. 10):

Azimut	Wandstärke der Röhre I	Wandstärke der Röhre II	Wandstärke der Röhre III
20°	0,149 cm	0,132 cm	0,130 cm
30	0,138 "	0,115 "	0,114 "
40	0,122 "	0,100 "	0,100 "
50	0,100 "	0,089 "	0,087 "
60	0,086 "	0,076 "	0,070 "
70	0,079 "	0,068 "	0,057 "
80	0,073 "	0,056 "	0,050 "
90	0,071 "	0,050 "	0,044 "
100	0,071 "	0,050 "	0,039 "
110	0,073 "	0,046 "	0,035 "
120	0,078 "	0,046 "	0,034 "
130	0,082 "	0,048 "	0,037 "



Graph. Darstellung 8. Glasdicke bei verschiedenem Azimut der Röhre I.



Graph. Darstellung 9.
Glasdicke bei verschiedenem Azimut der Röhre II.

Graph. Darstellung 10.
Glasdicke bei verschiedenem Azimut der Röhre III.

Es ergibt sich somit, daß wenigstens annähernd immer die Glaswand dort am dünnsten gefunden wurde, wo das intensivste Strahlenbündel austritt. Auffallend ist dagegen die starke Abnahme der Intensität in den drei Fällen, wenn man vom Azimut 110° zu 130° übergeht. Dieser Abnahme entspricht keineswegs eine entsprechend große Zunahme der Glashöhe. Hier kommt eine Erscheinung in Betracht, die auch Röntgen¹⁾ fand, nämlich daß die Intensität der X-Strahlung wesentlich abnimmt, wenn sie sich der Richtung der Antikathodenfläche nähert.

Bemerkung. Die „berechneten“ Intensitäten in den graphischen Darstellungen 15—17 sind gewonnen unter der versuchsweisen Annahme einer homogenen X-Strahlung mit nur einem Absorptionskoeffizienten β im Glase unter Verwendung des bekannten Absorptionsgesetzes:

$$J' = J \cdot e^{-\beta d}.$$

Folgende β ergeben eine möglichst gute Darstellung der beobachteten Intensitäten:

Röhre I	Röhre II	Röhre III
$\beta_1 = 0,0078$	$\beta_{II} = 0,0061$	$\beta_{III} = 0,0068$

III. Photographische Versuche.

Die Polarisation der X-Strahlen auch durch ihre Wirkung auf die photographische Platte nachzuweisen, wurde von Anfang an erstrebt. Immer wieder wurden derartige Versuche aufgenommen, nach verschiedenen Methoden: *stets mit negativem Resultat.*

35. Die ersten Versuche wurden mit Films gemacht, die vielleicht gleichmäßiger lichtempfindlich sind als photographische Platten. Auf einer horizontalen Achse, in deren Verlängerung die Emissionsstelle der primären X-Strahlen gebracht wurde — die Richtung der Kathodenstrahlen war wieder senkrecht zur X-Strahlenachse — befand sich als Radiator eine runde Aluminiumscheibe (Durchmesser 44 cm), vor dieser eine Holztrommel, auf die der Film gespannt wurde (Durchmesser 17 cm), und vor dieser eine runde Pb-Platte (Dicke 1,5 cm; Durchmesser 20 cm), um den Film vor Primärstrahlen zu schützen, natürlich alles zentriert. Der ganze Apparat kam

1) W. C. Röntgen, Berl. Ber. 1897. p. 395.

in einen lichtdichten Kasten zu stehen. Der zur Achse senkrechte Querschnitt des Primärstrahlenbündels war kreisförmig; sein Durchmesser war dort, wo der Radiator sich befand, nur sehr wenig größer als dieser. Die Entfernung Antikathode-Pb-Platte maß 125 cm, so daß der Achsenwinkel der Primärstrahlen nur klein war. An einer Stelle war auf den Film ein Pb-Draht gelegt; sein Schattenbild bewies, daß der Film auch tatsächlich durch Sekundärstrahlen geschwärzt worden war. Die Expositionszeit betrug bis zu 30 Min. Benutzt wurden die englischen „Ensign-Rollfilms“, außerdem „hochempfindliche Lumièrefilms“. Entwickelt wurde mit Metol-Adurol, später dann mit dem härter arbeitenden Hydrochinon. Sämtliche Films sind vollkommen gleichmäßig schwarz, ohne die leiseste Verschiedenheit zu zeigen.

36. Dann wurde die Versuchsanordnung derjenigen der elektrischen Versuche vollständig nachgebildet. Als Radiator diente die Paraffinkugel, die genau so wie dort bestrahlt wurde. Horizontal über dem Radiator befand sich eine photographische Platte, in gleicher Entfernung (1 cm), vertikal und parallel zur Achse der Primärstrahlen, eine zweite. Beide Platten wurden stets derselben Verpackung entnommen, und gleichzeitig und in einer Schale entwickelt. Vor Primärstrahlen waren die photographischen Platten durch die vorerwähnte 15 mm starke Pb-Platte geschützt, die in der Mitte mit einem runden Loch versehen wurde, so daß — wenn das ganze System zentriert war — nur gerade der Radiator von primären X-Strahlen getroffen wurde. Ein kleines Stück Pb-Blech, das auf die photographischen Platten gelegt wurde, sollte die Schwärzung durch Sekundärstrahlen erweisen. Die ganze Versuchsanordnung wurde in den lichtdichten Kasten eingesetzt. Statt der Paraffinkugel wurde auch einmal die S-Kugel oder die Al-Kugel genommen. Die Platten wurden photometrisch untersucht. Die Entwicklung geschah im vollständig finstern Raum mittels Hydrochinon. Meistens wurden die Versuche mit weichen bis mittelweichen Strahlen gemacht, einmal aber auch mit harten. Plattensorte: „Hochempfindliche Perutz-trockenplatte“, einmal auch „radiographische Lumièreplatte“; Expositionszeit: 15—60 Min. Das Resultat dieser Versuche war folgendes: Mit dem bloßen Auge be-

trachtet zeigte ein zusammengehöriges Plattenpaar kaum einen merklichen Schwärzungsunterschied; am Photometer war jedoch ersichtlich, daß bei keinem Plattenpaar beide Platten gleich schwarz waren; jedoch waren die Fälle, in denen diejenige Platte, die infolge der Polarisation die intensivere Sekundärstrahlung empfangen sollte, auch wirklich intensiver geschwärzt war, ebenso häufig wie der umgekehrte Fall, bei dem diejenige Platte intensivere Schwärzung zeigte, auf die infolge der Polarisation die schwächere Sekundärstrahlung wirken sollte. Diese Versuche waren somit erfolglos.

37. Nun konnte es ja sein, daß der durch die Polarisation bewirkte Intensitätsunterschied der Sekundärstrahlung in jenen beiden Richtungen zu gering war, als daß eine Platte oder ein Film darauf hätte reagieren können. Es galt also zu untersuchen, welcher Intensitätsunterschied die *Empfindlichkeitschwelle* überstieg. Zwei, derselben Verpackung entnommene Platten wurden, unter senkrechter Inzidenz stehend, von primären X-Strahlen getroffen.¹⁾ Die eine war von der Emissionsstelle der X-Strahlung 100 cm, die andere 102 cm entfernt. Da, wie Röntgen angegeben hat, auch bei dieser Strahlung die Intensität indirekt proportional dem Quadrat der Entfernung ist, so hat die Strahlung einen Intensitätsunterschied von ≈ 4 Proz., wenn sie die Platten trifft. Die photometrische Untersuchung ergibt, daß die Platte, die in größerem Abstand von der Antikathode stand, wirklich eine Nuance heller ist. Exposition: 5 Min.

Mit Filmen wurden analoge Versuche gemacht: Der Film war auf ein Brett gespannt und mit einem lichtdichten, schwarzen Papierstreifen bedeckt. Das Brett wurde ein wenig gegen die Einfallrichtung der Primärstrahlen geneigt; die Entfernung von der Antikathode war so bemessen, daß die Strahlungsintensität an den Enden des Films den gewünschten Unterschied hatte. Die Mittellinie des Films und die Mitte der Antikathode lagen auf einer Horizontalebene. Nach dem Versuch wurden die Filmen der Länge nach in drei Teile geschnitten und der mittlere in seiner Ebene um 180° gedreht, so daß der Schwärzungsunterschied an den Filmenden leicht

1) Die Platten waren in schwarzem Papier eingewickelt.

zu erkennen war. Die Länge der Films betrug 35 cm; Film sorte: „Hauff-Rollfilm“; Entwickler: Metol-Hydrochinon. Die Versuchsbedingungen sind aus folgender kleinen Tabelle zu entnehmen:

Intensitätsunterschied	Exposition
18 Proz.	2 Min.
9 "	2 "
5 "	2 "
10 "	15 Sek.

In allen vier Fällen war die verschiedene Schwärzung von jedem unbefangenen Beobachter auf den ersten Blick zu erkennen.

Inzwischen ergaben die elektrischen Messungen an Paraffin eine Polarisation von 10 Proz.¹⁾, bezogen auf die Sekundärstrahlung in einer Richtung, was die photographischen Versuchsergebnisse um so merkwürdiger erscheinen ließ. Daß übrigens die Schwärzung des Films auch tatsächlich durch die primären X-Strahlen erfolgte, erwies das Schattenbild eines Pb-Drahtes.

38. Eine dritte Versuchsanordnung war folgende: In den Aluminiumboden eines Hohl-Kreiszylinders aus Messing mit dem Durchmesser 11 cm wurde die Paraffinkugel mittels eines Aluminiumstieles zentrisch eingesetzt. Der Zylinder wurde horizontal so aufgestellt, daß seine Achse mit der Achse der Primärstrahlen zusammenfiel. Durch zwei Pb-Schirme mit entsprechender Öffnung wurde erreicht, daß der kreisförmige Querschnitt des Primärstrahlenbündels dort, wo es den Radiator traf, nur einen ganz klein wenig größeren Durchmesser hatte als der Radiator selbst, und daß die X-Strahlen, die seitlich an der Glaswand der Röhre entstehen, den Zylinder nicht treffen konnten. Ringsum an die Innenwand des Messingzylinders kam ein 9 cm breiter Film zu liegen, der also nur von Sekundärstrahlen, nämlich an erster Stelle von den Strahlen des Paraffins, an zweiter Stelle von den Strahlen der Luft, des Al-Bodens und des Al-Stieles des Radiators getroffen werden konnte — lauter Substanzen, die, wie die elektrischen

1) Der Film müßte einen Schwärzungsunterschied von 20 Proz. zeigen; vgl. Begründung § 10.

Versuche zeigen, die Polarisation anzuzeigen vermögen. Der Al-Stiel des Radiators war mittels eines kleinen Messingzapfen in den Al-Boden befestigt, dessen Schattenbild auf dem Barium-platincyanürschirm somit zugleich ein Einstellungskriterium ergab. Die ganze Anordnung war sorgfältig zentriert und in den lichtdichten Kasten eingebaut. Filmsorte: „Hauff-Roll-film“; Entwickler: Hydrochinon, auch Standentwickelung mit Glyzin. Expositionszeiten: 1 Min. bis zu 90 Min. Die Versuche wurden meistens mit weichen Strahlen angestellt. Der Abstand Radiator-Antikathode wurde möglichst klein gemacht. Außer der bisher benutzten Röhre kam auch eine neue zur Verwendung.

Es wurde auch einmal die Paraffinkugel und der Al-Boden ganz entfernt, so daß nur Luft als Radiator diente; ein andermal war die Al-Kugel eingesetzt. Stets ergab sich das-selbe Resultat: der Film war durch die Sekundärstrahlung völlig gleichmäßig geschwärzt.

39. Zu jener Zeit veröffentlichte Haga¹⁾ seine Versuchsergebnisse.

Haga, durch Barklas Versuche angeregt, versuchte eben-falls die Polarisation der X-Strahlen photographisch nachzuweisen, indem er die Sekundärstrahlung eines Radiators auf Films einwirken ließ. Als Radiator diente ihm Luft, später dann ein Konus aus Bogenlampenkohle, mit der Spitze gegen die Primärstrahlen gerichtet. Auch er erhielt mit dieser Anordnung keine Maxima und Minima in der Schwärzung.

Auch diese Versuche wurden in vorliegender Arbeit wieder-holt. Kohlen von verschiedener Dicke mit angedrehter Spitze wurden in den Aluminiumboden des vorerwähnten Messing-zylinders zentrisch eingesetzt. Exponiert wurde bis zu 90 Min. Stets waren die Films gleichmäßig schwarz.

Ein analoger Versuch mit einem zugespitzten Paraffin-zylinder ergab ebenfalls negatives Resultat.

Inzwischen hatte Barkla²⁾ nachgewiesen, daß die an einer Kohlenplatte nach entsprechenden Richtungen ausgesandten

1) H. Haga, Versl. K. Ak. van Wet. 15. p. 64—68. 1906; Beibl. 30. p. 1083. 1906; Ann. d. Phys. 23. p. 439—444. 1907.

2) C. G. Barkla, Proc. Roy. Soc. (A) 77. p. 247—255. 1906.

Tertiärstrahlen eine fast vollständige Polarisation der Sekundärstrahlen, von Primärstrahlen ebenfalls an Kohle erzeugt, anzeigen. Barkla hat auch hier nur die elektrische Wirkung der Strahlung untersucht.

Dies bot Haga Veranlassung, die Polarisation der Sekundärstrahlen nunmehr auch photographisch mittels Tertiärstrahlen zu erweisen. Hier zeigten nun Hagas photographische Versuche Erfolg: Die Films zeigten an den entsprechenden Stellen deutlich Maxima und Minima in der Schwärzung. Die Barklaschen Angaben bezüglich der Quantität der polarisierten X-Strahlen hält Haga für zu groß und zum Teil durch Asymmetrie der Bestrahlung vorgetäuscht.

Diese Resultate erhielt Haga bei einer Exposition von 60 Stunden.

40. Weiteren Versuchen, die Polarisation der Primärstrahlen mittels Sekundärstrahlung nachzuweisen, lag das Prinzip zugrunde, die Sekundärstrahlen vor dem Auftreffen auf den Film erst ein Medium passieren zu lassen, das dieselbe chemische Natur wie der Radiator hatte.

So wurde wieder die Al-Kugel eingesetzt und auf die Schichtseite des Films eine 0,03 mm starke Al-Folie gelegt. Es zeigte sich, daß die Absorption der vom Al ausgehenden Strahlen durch die Al-Folie äußerst gering ist. Exponiert wurde 20 Min. Der Film war sehr wenig geschwärzt, aber ringsum gleichmäßig.

Zu einem analogen Versuch mit Paraffin wurde gesmolzenes Paraffin auf eine Glasplatte gegossen, aus der rasch erstarrenden Masse ein rechteckiger, genügend langer Streifen herausgeschnitten, vom Glas gelöst und, solange er noch weich und schmiegsam war, um einen entsprechenden Metallzylinder gewickelt. Dieser Paraffinring wurde dann auf die Schichtseite des Films gelegt, so daß die von der Paraffinkugel ausgehenden Sekundärstrahlen erst durch eine 1 mm starke Paraffinschicht dringen mußten, worin sie übrigens noch weniger Absorption erlitten, als die Aluminiumstrahlen in der Aluminiumfolie. Exposition: 30 Min. Auch hier erfolgte gleichmäßige Schwärzung.

41. Mittlerweile ergaben die elektrischen Messungen, daß beim Paraffin die Sekundärstrahlung zum großen Teil

aus dem Innern des Radiators kommt, nicht nur von der Oberfläche. Deshalb wurde schließlich noch folgender Versuch gemacht. Aus Paraffin wurde ein massiver Kreiszylinder hergestellt (Durchmesser 10 cm), dessen parallele Grundflächen voneinander 7 cm entfernt waren. Auf diesen wurde je ein Fadenkreuz aus Pb-Draht befestigt; der Schnittpunkt der parallelen Fäden lag in der Achse des Zylinders. Dieser Paraffinzylinder wurde horizontal in den früher beschriebenen Pb-Kasten eingesetzt, da wo bei den elektrischen Versuchen die Paraffinkugel stand. Er ruhte auf einem geeigneten Träger, der gestattete den Zylinder um seine horizontale Achse zu drehen, eventuell herauszunehmen, ohne daß der Zylinder neu eingestellt werden mußte. Die Einstellung erfolgte so, daß die zwei früher genannten und die zwei soeben bezeichneten Fadenkreuze aus Pb sich deckten. Um den Paraffinzylinder war ein Film und darüber ein schwarzer Papierstreifen gewickelt. War der Versuch zu Ende, so wurde der Film vor dem Entwickeln in Benzin gewaschen, damit etwaige fette Stellen auf dem Film entfernt würden. Der Film konnte nicht von Primärstrahlen getroffen werden. Exponiert wurde bis zu einer Stunde, ohne auch nur eine Spur verschiedener Schwärzung zu erhalten.

Der Versuch wurde einmal auch mit äußerst weichen Strahlen gemacht, was durch erhöhte Stromstärke und fast kontinuierliches Erhitzen der Regeneriervorrichtung während der ganzen Exposition (20 Min.) erreicht wurde, aber mit negativem Resultat.

IV. Erklärungsversuche.

42. Wenn man die Art und Weise betrachtet, wie die X-Strahlen an der Antikathode entstehen, so bietet sich eine Möglichkeit, aus der Hemmung des Kathodenstrahlelektrons sowohl den photographischen Mißerfolg, als auch den oben gefundenen Einfluß absorbierender Medien auf den Betrag der Polarisation zu erklären.

Van der Waals¹⁾ weist darauf hin, daß das Kathodenstrahlelektron beim Zusammenstoß mit dem ersten Teilchen

1) Van der Waals, Ann. d. Phys. 22, p. 603, 1907.

der Antikathode nur etwa 0,02 der Energie, die es im ganzen durch Strahlung verliert, ausstrahlt. Nach dem ersten Zusammenstoß sind alle Richtungen gleich wahrscheinlich, das Elektron kommt dann auf einem Zickzackkurs zur Ruhe oder nimmt vielmehr die Geschwindigkeit der Wärmebewegung an. Da nun Kathodenstrahlen von großer Geschwindigkeit harte X-Strahlen hervorrufen, dagegen Kathodenstrahlen von geringer Geschwindigkeit die weichen X-Strahlen, so wird beim ersten Anprall eines jeden Elektrons ein relativ harter Anteil der Strahlung, beim Zickzackkurs der weiche Anteil der Strahlung emittiert. Die Polarisation kann aber nur vom ersten Anstoß, wo das Elektron noch seine ursprüngliche Richtung hat, herühren. Folglich ist der harte Anteil der Strahlung polarisiert, der weiche Anteil dagegen unpolarisiert. Auf die photographische Platte wirken aber hauptsächlich die weichen X-Strahlen, wie dies Röntgen¹⁾ selbst festgestellt hat.

Der Einfluß absorbierender Medien bestand darin, daß die primären X-Strahlen, nachdem sie jene Medien unter starker Absorption durchdrungen hatten, stets eine Zunahme der Polarisation bis zum doppelten Betrag zeigten. Da nun durch die Absorption in den meisten Substanzen hauptsächlich der weiche Anteil des primären Strahlengemisches abgeschnitten wird, d. i. nach vorstehendem der unpolarisierte, so sind also in der Tat die durchgegangenen X-Strahlen reicher an harten, polarisierten Impulsen geworden. Vielleicht ist die größere Absorption der Röhre I in dieser Weise zum Teil auf ihre größere Glasdicke (vgl. § 34) zurückzuführen.

Hiermit im Zusammenhang steht vielleicht auch die so verschieden große Wirksamkeit der verschiedenen Radiatorsubstanzen, die Polarisation anzuzeigen.

In je höherem Grade nämlich diese Substanz die harten Strahlen aus dem primären Gemisch bevorzugt absorbiert und in Sekundärstrahlung umwandelt, desto mehr wird sie den polarisierten Anteil zum Ausdruck bringen. Die große Wirksamkeit der Kohle in den Hagaschen Versuchen mag auf diese Weise ihre Erklärung finden, da Kohle nach einer Be-

1) W. Röntgen, Berliner Ber. 1897. p. 405—406.

obachtung Hagas¹⁾ in der Tat gerade die härteren Strahlen bevorzugt absorbiert. Über Paraffin sind in dieser Hinsicht keine Versuche angestellt.

Die günstigste Anordnung, um die Polarisation möglichst stark zum Ausdruck zu bringen, wäre hiernach so zu treffen:

1. Man nehme eine Radiatorsubstanz, die besonders die harten Impulse in Sekundärstrahlung umwandelt, und man verwende
2. gleichzeitig solche absorbierende Medien, die im primären X-Strahlenbündel bevorzugt die weichen Strahlen absorbieren.

Wenn demnach auf Grund vorstehender Betrachtungen die Frage nach dem wirklichen Betrag der Polarisation der X-Strahlen unbeantwortet bleiben muß, weil die mitgeteilten Messungen mehr als ein Ausdruck für die besprochenen selektiven Eigenschaften der verwendeten Radiatorsubstanz usw. zu gelten haben, so steht doch unzweifelhaft fest, entgegen der Meinung Hagas und in Übereinstimmung mit den Messungen Barklas, daß die primären X-Strahlen eine teilweise Polarisation wirklich zeigen und demnach als eine transversale Ätherstörung aufzufassen sind.

Was endlich eine Erklärung der oben gefundenen Tatsache betrifft, daß eine harte Röhre weniger polarisierte X-Strahlen aussendet als eine weiche, so scheint man hierzu mit der Annahme selektiver Absorption des Radiators nicht auszukommen, sondern kann betreffend der Mechanik der Hemmung des Elektrons die nicht unplausible Hypothese aufstellen, daß ein rasches Elektron (harte Röhre) einen verhältnismäßig geringeren Teil seiner ganzen Energie beim ersten gerichteten Stoß — und demnach polarisiert — ausstrahlt als ein langsames Elektron.

V. Zusammenfassung der Resultate.

1. Durch die ionisierende Wirkung der Sekundärstrahlung von gasförmigen, flüssigen und festen Substanzen läßt sich eine teilweise Polarisation der primären X-Strahlen nachweisen. Als bestwirkender Radiator (Sekundärstrahlenquelle) einer größeren Anzahl von untersuchten Substanzen erwies sich eine Paraffinkugel, als unwirksamster eine Bleikugel.

1) H. Haga, Ann. d. Phys. 23. p. 446. 1907.

2. Bei mittelweichen Primärstrahlen zeigt Paraffin 10 Proz. Polarisation an, d. h., würde ohne Polarisation die Intensität der Sekundärstrahlen in jeder Richtung 100 Einheiten messen, so mißt infolge der Polarisation die Intensität parallel zu den Kathodenstrahlen 90, senkrecht dazu 110 Einheiten. Der Maximalwert, der je gemessen wurde, war 16 Proz. und wurde mittels weichster Strahlen erhalten.

3. Je härter die X-Strahleröhre ist, desto weniger Polarisation vermag der Radiator anzuzeigen, und desto größer ist die Intensität der Sekundärstrahlen; indessen zeigen selbst die härtesten Strahlen noch Polarisation.

4. Aluminium zeigt bei mittelweichen Strahlen 5 Proz. Polarisation an. Mit Blei läßt sich die Polarisation nicht mit völliger Sicherheit nachweisen.

5. Paraffiniertes Blei zeigt um so mehr Polarisation an, je dicker die Paraffinschicht ist; bemerkbar macht sich schon eine Dicke von 0,25 mm.

6. Die Sekundärstrahlung des Paraffins kommt zum weitaus größten Teil aus dem Innern, nicht von der Oberfläche.

7. Sekundärstrahlen, die der Radiator schiefliegt gegen die Achse der Primärstrahlen emittiert, zeigen weniger Polarisation an als die senkrecht emittierten.

8. Werden in den Gang der Primärstrahlen beträchtlich absorbierende Medien, wie Platin, Kupfer, Wasser, eingeschaltet, so zeigt der Paraffinradiator stets eine Zunahme der Polarisation der durchgehenden X-Strahlen bis zum doppelten Werte an.

9. Die Polarisation hängt vom Winkel zwischen Strahlungsebene und Einfallsebene nicht ab, wobei unter Strahlungsebene jede durch die Achse der Kathodenstrahlen gehende Ebene, unter Einfallsebene die durch die Normale zur Antikathode gehende Strahlungsebene verstanden wird.

10. Die Polarisation nimmt mit dem Azimut zwischen 30° und 90° zu; für Azimute, die größer als 90° , nimmt die Polarisation nicht ab, sondern scheint ein Maximum bei ungefähr 110° zu haben. (Unter Azimut

wird der Winkel zwischen Kathodenstrahl und auf Polarisation geprüften X-Strahl verstanden.)

11. Die Polarisation und ihre Änderung mit dem Azimut ist für verschiedene Röhren gleicher Härte quantitativ verschieden, aber von derselben Größenordnung.

12. Die Intensität der X-Strahlen außerhalb der Röhre — gemessen an der Sekundärstrahlung — erwies sich in der Einfallsebene als stark abhängig vom Azimut. Die Glasdicke der drei Röhren zeigte insoweit dieselbe Abhängigkeit, als deren Minima zusammenfielen mit den Maxima der Strahlung (bei 100—110° Azimut). Nach 10. zeigte auch die Polarisation ungefähr bei demselben Azimut gleichfalls ihren maximalen Betrag.

13. Sämtliche Versuche und Methoden, die Polarisation der primären X-Strahlen photographisch durch Einwirkung der Sekundärstrahlung auf Films und Platten nachzuweisen, hatten negativen Erfolg.

14. Es wurde eine Erklärung angedeutet für den photographischen Mißerfolg, den Einfluß 1. der absorbierenden Medien, 2. der Radiatorsubstanz und 3. der Strahlenhärte auf den Betrag der Polarisation mit Hilfe der selektiven Absorption und einer speziellen Betrachtung über den Mechanismus der Entstehung der X-Strahlen.

München, Physik. Inst. d. Univ., November 1908.

(Eingegangen 16. Dezember 1908.)

5. *Bemerkung zu der Arbeit von D. Mirimanoff
„Über die Grundgleichungen . . .“;
von A. Einstein.*

1. Das in dieser Arbeit¹⁾ angegebene System von Differentialgleichungen und Transformationsgleichungen unterscheidet sich von dem Minkowskis in keiner Weise bzw. nur dadurch, daß derjenige Vektor, welcher gewöhnlich mit \mathfrak{H} bezeichnet wird (magnetische Kraft), vom Verfasser mit

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{H} - \frac{1}{\sigma} [\mathfrak{P} \mathfrak{w}]$$

bezeichnet wurde.

Differentialgleichung (I) ist nämlich bei Einführung von \mathfrak{D} , wie der Verfasser selbst zeigt, identisch mit der betreffenden Gleichung Minkowskis, während die übrigen drei Differentialgleichungen \mathfrak{H} nicht enthalten und bereits die Form der entsprechenden Gleichungen Minkowskis haben. Der Verfasser sagt auch selbst, daß sich seine Vektoren \mathfrak{E} , \mathfrak{D} , \mathfrak{V} , \mathfrak{B} transformieren, wie die gewöhnlich mit \mathfrak{E} , \mathfrak{D} , \mathfrak{H} , \mathfrak{B} bezeichneten Vektoren.

2. Auch die Beziehungen zwischen den Vektoren, welche Materialkonstanten (ϵ , μ und σ) enthalten, unterscheiden sich nicht von den entsprechenden Minkowskis. Der Verfasser geht nämlich davon aus, daß für ein relativ zu dem betrachteten Systempunkt momentan ruhendes Koordinatensystem die Gleichungen

$$\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{J} = \sigma \mathfrak{E}$$

gelten sollen; bedenkt man nun, daß der Vektor \mathfrak{H} (des Verfassers) für $w=0$ mit dem Vektor \mathfrak{D} identisch ist, und daß \mathfrak{D} in den Differentialgleichungen des Verfassers und in dessen Transformationsgleichungen genau dieselbe Rolle spielt, wie in Minkowskis Gleichungen (gewöhnlich mit \mathfrak{H} bezeichnet),

1) D. Mirimanoff, Ann. d. Phys. 28. p. 192. 1909.

so ersieht man, daß auch diese Gleichungen mit den entsprechenden Minkowskis übereinstimmen, bis auf den Umstand, daß die Bezeichnung \mathfrak{H} durch die Bezeichnung \mathfrak{D} ersetzt ist.

3. Es ist also gezeigt, daß die Größe \mathfrak{D} Mirimanoffs in dessen sämtlichen Gleichungen dieselbe Rolle spielt wie diejenige Größe, welche man gewöhnlich mit \mathfrak{H} bezeichnet und „magnetische Kraft“ oder „magnetische Feldstärke“ nennt. Trotzdem hätten die Gleichungen Mirimanoffs einen anderen Inhalt als die Gleichungen Minkowskis, wenn die Größe \mathfrak{D} Mirimanoffs definitionsgemäß eine andere physikalische Bedeutung hätte als die gewöhnlich mit \mathfrak{H} bezeichnete Größe.

Um hierüber ein Urteil zu gewinnen, fragen wir uns zunächst, was in den Minkowskischen Gleichungen

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{curl } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + i, \\ \text{curl } \mathfrak{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathfrak{D} = \varrho, \\ \text{div } \mathfrak{B} = 0 \end{array} \right.$$

die Vektoren \mathfrak{E} , \mathfrak{D} , \mathfrak{H} , \mathfrak{B} für eine Bedeutung haben. Man muß zugeben, daß diese Vektoren für den Fall, daß die Geschwindigkeit w der Materie von Null abweicht, bisher nicht eigens definiert worden sind; Definitionen, auf welchen (ideale) Messungen dieser Größen basiert werden könnten, besitzen wir nur für den Fall, daß w verschwindet, und zwar denke ich an jene Definitionen, welche aus der Elektrodynamik ruhender Körper wohlbekannt sind. Wenn daher unter Benutzung der Minkowskischen Gleichungen gefunden ist, daß in einem bestimmten, mit der Geschwindigkeit w bewegten Volumelement des Körpers die Feldvektoren zu einer gewissen Zeit die bestimmten (Vektor-)Werte \mathfrak{E} , \mathfrak{D} , \mathfrak{H} , \mathfrak{B} haben, so müssen wir diese Feldvektoren erst auf ein mit Bezug auf das betreffende Volumelement ruhendes Bezugssystem transformieren. Die so erhaltenen Vektoren \mathfrak{E}' , \mathfrak{D}' , \mathfrak{H}' , \mathfrak{B}' haben erst eine bestimmte physikalische Bedeutung, die aus der Elektrodynamik ruhender Körper bekannt ist.

Die Minkowskischen Differentialgleichungen sagen also für Punkte, in denen $w \neq 0$ ist, für sich allein noch gar nichts aus, wohl aber die Minkowskischen Differentialgleichungen zusammen mit den Minkowskischen Transformationsgleichungen und mit der Bestimmung, daß für den Fall $w=0$ die Definitionen der Elektrodynamik ruhender Körper für die Feldvektoren gelten sollen.

Wir haben nun zu fragen: Ist der Vektor \mathfrak{D} Mirimanoffs in anderer Weise definiert als der von uns soeben mit \mathfrak{H} bezeichnete Vektor? Dies ist nicht der Fall, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Für die Feldvektoren \mathfrak{E} , \mathfrak{D} , \mathfrak{D} , \mathfrak{B} Mirimanoffs gelten dieselben Differentialgleichungen und Transformationsgleichungen wie für die Vektoren \mathfrak{E} , \mathfrak{D} , \mathfrak{H} , \mathfrak{B} der Minkowskischen Gleichungen (A).

2. Sowohl Mirimanoffs Vektor \mathfrak{D} als auch der Vektor \mathfrak{H} von (A) sind nur für den Fall $w=0$ definiert. In diesem Falle ist aber wegen Mirimanoffs Gleichung

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{H} - \frac{1}{c} [\mathfrak{B} w]$$

$\mathfrak{D} = \mathfrak{H}$ = Feldstärke zu setzen; für den Vektor \mathfrak{H} der Gleichungen (A) gilt genau in gleicher Weise, daß er im Falle $w=0$ mit der Feldstärke im Sinne der Elektrodynamik ruhender Körper gleichbedeutend ist.

Aus diesen beiden Argumenten folgt, daß der Vektor \mathfrak{D} Mirimanoffs und der Vektor \mathfrak{H} von (A) durchaus gleichwertig sind.

4. Um seine Resultate bezüglich der Wilsonschen Anordnung mit den von Hrn. Laub und mir erhaltenen zu vergleichen, hätte der Verfasser die Betrachtung so weit durchführen müssen, daß er zu Beziehungen zwischen definierten, d.h. wenigstens prinzipiell der Erfahrung zugänglichen Größen gelangt wäre. Er hätte zu diesem Zwecke nur die seinem Gleichungssystem entsprechenden Grenzbedingungen anzuwenden gehabt. Nach dem Vorigen hätte er so zu genau denselben Folgerungen gelangen müssen wie wir, da seine Theorie mit der von Minkowski identisch ist.

Schließlich möchte ich noch hinweisen auf die Bedeutung

der neulich erschienenen Arbeit von Ph. Frank¹⁾, welche die Übereinstimmung zwischen der Lorentz schen elektronentheoretischen und der Minkowskischen Behandlung der Elektrodynamik bewegter Körper durch Berücksichtigung der Lorentzkontraktion wiederherstellt. Der Vorzug der elektronentheoretischen Behandlungsweise liegt einerseits darin, daß sie eine anschauliche Deutung der Feldvektoren liefert, andererseits darin, daß sie auskommt ohne die willkürliche Voraussetzung, daß die Differentialquotienten der Geschwindigkeit der Materie in den Differentialgleichungen nicht auftreten.

Bern, Januar 1909.

1) Ph. Frank, Ann. d. Phys. 27. p. 1059. 1908.

(Eingegangen 22. Januar 1909.)

